

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta stavební

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Brno, 2017

Bc. Tomáš Prokš



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

**DYNAMICKÁ ANALÝZA MOSTNÍCH
KONSTRUKCÍ**

DYNAMIC ANALYSIS OF BRIDGES STRUCTURES

DIPLOMOVÁ PRÁCE

DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Tomáš Prokš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PETR HRADIL, Ph.D.

BRNO 2017



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	N3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student	Bc. Tomáš Prokš
Název	Dynamická analýza mostních konstrukcí
Vedoucí práce	Ing. Petr Hradil, Ph.D.
Datum zadání	31. 3. 2016
Datum odevzdání	13. 1. 2017

V Brně dne 31. 3. 2016

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA
Děkan Fakulty stavební VUT

PODKLADY A LITERATURA

[1] Craig, R., Structural Dynamics, An Introduction to Computer methods

[2] BACHMANN, H., AMMANN, W. Vibrations in Structures—Induced by Man and Machines, Structural Engineering Documents, Vol. 3e, International Association of Bridge and Structural Engineering (IABSE), Zurich, 1987

[3] BACHMANN, H. "Lively" footbridges—a real challenge, In Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges, Paris, France, November 20–22, 2002, pp. 18–30.

[4] ČSN EN 1991-1-4 ed. 2 Zatížení konstrukcí - Část 1-4: Obecná zatížení - Zatížení větrem

[5] ČSN EN 1991-2 ed. 2 Eurokód 1: Zatížení konstrukcí - Část 2: Zatížení mostů dopravou

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

Provedte dynamickou analýzu vybrané mostní konstrukce. Odvoďte pohybovou rovnici popisující mostní konstrukci. Sestavte dynamický model zatížení a proveďte odezvu na dynamické buzení. Výsledky srovnajte z numerickým výpočtovým modelem konstrukce.

STRUKTURA DIPLOMOVÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).

2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

Ing. Petr Hradil, Ph.D.
Vedoucí diplomové práce

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá dynamickou analýzou zavěšené ocelové lávky pro pěší. Byla studována dynamická odezva kmitání konstrukce na zatížení, vyvolané pohybem chodců. Odezva konstrukce na toto zatížení překročila dovolené limity. Z toho důvodu byl zkoumán vliv omezovače kmitání s laděnou přídavnou hmotou. K výpočtu pohybových rovnic, jedno a dvoustupňového modelu, byl použit program MATLAB a výsledky byly porovnány s numerickým modelem v programovém systému ANSYS.

KLÍČOVÁ SLOVA

Dynamická analýza, dynamické zatížení, zatížení chodci, rezonanční kmitání, omezovač kmitání TMD, harmonické zatížení, pohybová rovnice.

ABSTRACT

The diploma thesis deals with dynamic analysis of cable-stayed steel pedestrian footbridge. The dynamic response of pedestrian-induced vibration was studied. The response of structure exceeded standard acceptance limit. Due to the effect of installed Tuned Mass Damper was studied. Motion equations of single and two degree of freedom model were solved in program MATLAB and the results were compared with numeric model in ANSYS.

KEYWORDS

Dynamic analysis, dynamic load, pedestrian load, resonance vibration, Tuned Mass Damper, harmonic load, equation of motion.

PROKŠ, Tomáš *Dynamická analýza mostních konstrukcí*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, 2017. 48 s. Vedoucí práce byl Ing. Petr Hradil, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 6. 1. 2017

Bc. Tomáš Prokš
autor práce

Poděkování:

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Petru Hradilovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

OBSAH

Úvod	11
1 Teoretická část	12
1.1 Idealizace konstrukce	12
1.1.1 Jednostupňový model	12
1.1.2 Vícetupňový model	14
1.1.3 Spojitý model	15
1.2 Řešení pohybových rovnic	17
1.2.1 Obyčejná diferenciální rovnice	17
1.2.2 Soustava obyčejných diferenciálních rovnic	18
1.2.3 Parciální diferenciální rovnice	19
1.3 Dynamický model zatížení	21
1.3.1 Zatížení chodci	21
1.3.2 Posouzení	26
2 Analýza lávky pro pěší	29
2.1 Popis konstrukce	29
2.1.1 Vlastní frekvence konstrukce	29
2.2 Dynamická odezva	34
2.2.1 Vliv jednoho chodce	34
2.2.2 Vliv skupiny chodců	37
2.2.3 Kontrola na numerickém modelu	39
2.3 Redukce vibrační odezvy	41
2.3.1 Omezovač kmitání	41
2.3.2 Odezva dvoustupňového modelu	43
2.3.3 Kontrolní výpočet	44
2.4 Řešení v systému MATLAB	46
3 Závěr	47
Literatura	48

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Jednostupňový model [3]	12
1.2	Působící síly [3]	13
1.3	Působící síly	14
1.4	Spojité model a diferenciální element [4]	16
1.5	Záznam svislé složky pro různé povrchy a frekvence [1]	22
1.6	Funkce zatížení	24
1.7	Různé hodnoty hustoty chodců [3]	25
1.8	Redukční součinitel ψ [2]	26
1.9	Vnímání vibrací [1]	27
2.1	Pohled na analyzovanou lávku pro pěší [9].	29
2.2	Schématický náčrt konstrukce.	30
2.3	Lávka pro pěší nahrazena jednostupňovým modelem.	30
2.4	Prostorový prutový model poskytnutý vedoucím práce.	31
2.5	Tvary kmitání.	32
2.6	Odezva na 1. harmonický člen.	35
2.7	Příspěvek od 2. a 3. harmonického členu.	36
2.8	Zrychlení v časové oblasti.	37
2.9	Amplitudo-frekvenční závislost.	38
2.10	Amplitudo-frekvenční závislost.	40
2.11	Idealizace konstrukce s TMD	42
2.12	Zrychlení konstrukce s TMD v časové oblasti.	43
2.13	Zrychlení konstrukce s TMD ve frekvenční oblasti.	44
2.14	Amplitudo-frekvenční závislost s TMD.	45
2.15	Model tlumiče.	45

SEZNAM TABULEK

1.1	Svázání rychlosti a frekvence chůze	23
2.1	Vliv jednoho chodce.	36
2.2	Vliv skupiny chodců.	39

ÚVOD

Ve stavební praxi při analýze konstrukcí si lze velmi často vystačit pouze se statickým výpočtem, který z obecné dynamické podmínky rovnováhy extrahuje časovou proměnnou a tím vyloučí nejen vliv setrvačnosti na rovnováhu sil, ale rovněž závislost zatížení na čase. Naproti tomu dynamický výpočet bere v úvahu setrvačné vlastnosti hmoty konstrukce i dynamickou povahu přiloženého zatížení, ale je podstatně náročnější, což je důvodem, proč se běžně nepoužívá.

Prudký rozvoj v oblasti informačních technologií v poslední době zapříčinil velice dobrou dostupnost softwarových a hardwarových prostředků pro pokročilé modelování konstrukcí s vlivem materiálových i geometrických nelinearit, reologie a dalších. Do popředí dnes vystupují i dynamické výpočty, které již nejsou doménou pouze strojních inženýrů. Výpočetní čas se zkracuje a výpočetní výkon se stává cenově přijatelný. Zvyšují se však požadavky na inženýra, který by měl být hlouběji teoreticky vybaven, aby mohl volit složitost výpočtového modelu adekvátně řešenímu problému a posoudit výsledky výpočtu. Snaha vystihnout skutečné chování konstrukce by mohla vést k počítání komplexních úloh i v případech, kdy to není nutné.

Historie stavebního inženýrství časem poukázala na případy, kdy od použití dynamického výpočtu nelze ustoupit. Kolaps Tacoma Narrows Bridge zapříčinil podrobnější studium zatížení větrem. Vliv odtrhávání větrných vírů při obtékání těles na příčné kmitání vysokých štíhlých komínů, stožárů a štíhlých mostovek mostních objektů. Moderní technologie a pokročilé stavební materiály umožňují návrh elegantních subtilních mostních konstrukcí, které splňují nejnáročnější vize futuristicky vyhlížejících architektů. Štíhlé konstrukce mají vlastní frekvence blízké frekvencím lidské chůze a hrozí, že dojde k rezonanci. Vznik rezonančního kmitání měl za následek uzavření Millennium Bridge v Londýně ihned po slavnostním otevření. Incident poukázal na důležitost návrhu lávky pro pěší na dynamické zatížení chodci a interakci mezi chodcem a konstrukcí.

Cíl práce

Předkládaná práce si klade za cíl využitím programového prostředí MATLAB a pomocí jednostupňového modelu konstrukce analyzovat chování lávky pro pěší podrobené dynamickému modelu zatížení reprezentující zatížení chodci. A následně rozbor vlivu upevněného tlumiče kmitání při různé volbě jeho parametrů. Konstrukce lávky s tlumičem kmitání bude modelována jako dvoustupňová soustava.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Idealizace konstrukce

Za účelem analýzy dynamického chování konstrukce je nutno skutečnou konstrukci idealizovat vhodným výpočtovým modelem. Existují různé modely lišící se úrovní obecnosti, složitosti a požadovanými vstupními parametry.

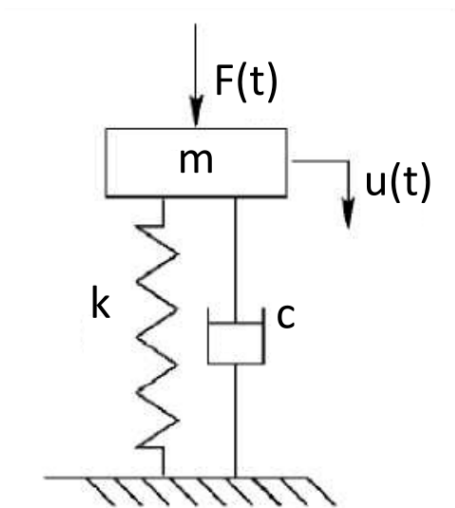
Základní dělení je na spojité a diskrétní modely, které v různé míře spojitý model diskretizují. Nejjednodušší je model jednostupňový a na opačné straně stojí modelování konstrukce jako kontinuum. Prostor mezi těmito hranicemi vyplňují modely označované jako vícešupňové vystihující konstrukci soustavou s n stupni volnosti. Speciálně pro $n = 1$ mluvíme o jednostupňovém modelu a pro $n = \infty$ o kontinuu.

1.1.1 Jednostupňový model

Odezvu konstrukce na dynamické zatížení $F(t)$ dostatečně přesně vystihuje jednostupňový model, který konstrukci nahrazuje oscilátorem se soustředěnou hmotou m , tuhostí pružiny k a tlumícím členem c . Tři parametry m, k, c definují celý model.

Pomocí jednostupňového modelu lze určit pouze první vlastní frekvenci kmitání konstrukce, která ovšem bývá pro praktický návrh rozhodující.

Parametry modelu



Obr. 1.1: Jednostupňový model [3]

Soustředěná hmota m je kmitající hmota konstrukce při prvním vlastním tvaru kmitu. Například pro prostě uložený nosník se uvažuje polovina hmotnosti nosníku.

Tuhost k přísluší tuhosti konstrukce v místě s největší amplitudou výchylky při prvním vlastním tvaru kmitu.

Vystihnout skutečnou povahu tlumení v konstrukci je obtížné. Tlumení vyjadřuje míru disipace energie ze systému vlivem tření ve spojích, vnitřního tření v materiálu nebo pohybem celé konstrukce v hmotném prostředí. Na základě experimentů bylo zjištěno, že pro stavební konstrukce je přijatelné

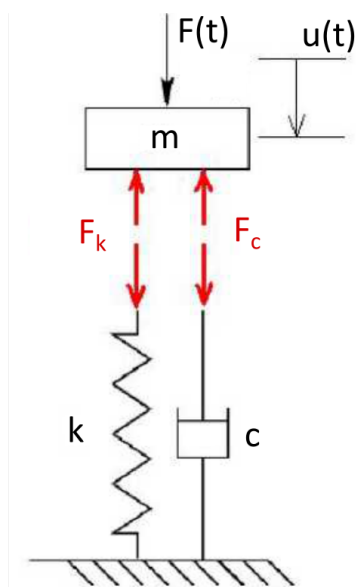
uvažovat lineárně viskózní model tlumení, kde tlumící síla závisí na relativní rychlosti a koeficientu viskózního tlumení c .

Pro praktické výpočty se zavádí relativní útlum ζ definovaný vztahem

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

vyjadřující poměr mezi zvoleným a kritickým útlumem. Doporučené hodnoty ζ lze najít pro různé materiály například v [2].

Odvození pohybové rovnice



Obr. 1.2: Působící síly [3]

Využitím Newtonova 2. pohybového zákona nebo d'Alembertova principu lze odvodit pohybovou rovnici popisující jednostupňový model. Oba postupy jsou ekvivalentní pouze d'Alembert zavádí pojem setrvačné síly $\mathbf{F}_I = -m\ddot{\mathbf{u}}$ působící proti pohybu tělesa.

$$\Sigma \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{u}} \Leftrightarrow \Sigma \mathbf{F}' = \mathbf{F}_I + \Sigma \mathbf{F} = 0 \quad (1.1)$$

První vztah rovnice (1.1) je zápis 2. Newtonova pohybového zákona a druhý vztah je zápis tzv. rovnice dynamické rovnováhy.

Obrázek (1.2) ilustruje pohyb hmoty m , výchylku $u(t)$, sílu pružiny $F_k = ku$ a tlumiče $F_c = c\dot{u}$ působící na soustředěnou hmotu společně s budící silou $F(t)$.

Dosazením do rovnic (1.1)

$$F(t) - F_k - F_c = m\ddot{u} \Leftrightarrow F_I + F(t) - F_k - F_c = 0,$$

vyjádřením jednotlivých sil a po úpravě se dospěje ke tvaru známého z odborné literatury

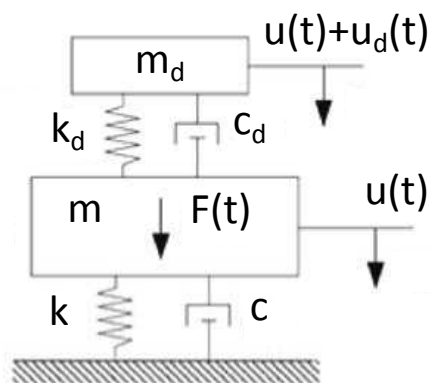
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t). \quad (1.2)$$

1.1.2 Vícetupňový model

Při analyzování výškových budov, stolového základu s upevněným strojem nebo konstrukce lávky s tlumičem kmitání se využívá vícetupňového modelu. S využitím více stupňů volnosti je možné sestavit komplexní modely konstrukce, složené z kombinace sériově a paralelně zapojených soustředěných hmot navzájem spojených pružinami a tlumiči. Modely vytvořené metodou konečných prvků jsou rovněž vícetupňové modely.

Takto sestavený model má n vlastních frekvencí, kde n odpovídá stupni volnosti modelu, a umožňuje ověřit, zda v jednotlivých částech konstrukce nedochází k rezonančnímu kmitání.

Parametry modelu



Obr. 1.3: Působící síly

Tuhosti a koeficienty tlumení jednotlivých pružin a tlumičů spolu se soustředěnými hmotnostmi tvoří neznámé parametry vícetupňového modelu, které vystupují v maticích hmotnosti, tuhosti a tlumení. Parametry lze určit odlišně pro různé stupně diskretizace.

Pokud bude řešeno kmitání vícepodlažní budovy volbou stupňů volnosti v podobě horizontálního posunu jednotlivých podlaží, lze uvažovat hmotnost podlaží budovy soustředěnou hmotou m a ohybo-

vou tuhost sloupů v daném podlaží tuhostí k . Tím je provedena velmi hrubá diskretizace skutečné konstrukce.

Podlaží budovy mohou být rovněž diskretizovány na kmitající hmoty. K určení těchto hmot a příslušejících tuhostí se využívá postupu metody konečných prvků. Konstrukce je diskretizována na konečné prvky, na nichž jsou definovány bazové funkce. Bazové funkce určují prvky hledané matice hmotnosti a tuhosti řešeného problému.

Pro matici hmotnosti existují dvě varianty. Použitím stejných bazových funkcí pro získání matice tuhosti i hmotnosti prvku se dostane model s konzistentní maticí hmotnosti. Pokud jsou použity jednodušší bazové funkce pro získání matice hmotnosti, jedná se o model se soustředěnými hmotnostmi.

Problém identifikace tlumících parametrů je obdobný jako u jednostupňového modelu, ale navíc je neznámý i způsob zapojení jednotlivých tlumičů a tedy podoba celkové matice tlumení. Proto se využívá Rayleighův model tlumení, který zavádí

vztah, který matici tlumení \mathbf{C} vyjadřuje proporcionálně k matici hmotnosti \mathbf{M} a matici tuhosti \mathbf{K} .

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (1.3)$$

Koeficienty α a β se určí ze dvou zvolených poměrných útlumů, odpovídajícím různým tvarům kmitu.

Odvození pohybové rovnice

V rovnici rovnováhy pro vícestupňové modely vystupují matice \mathbf{M} , \mathbf{C} a \mathbf{K} reprezentující rovnice rovnováhy pro jednotlivé soustředěné hmoty. Tyto rovnice se získají nahrazením vazeb působícími silami.

Speciálně pro dvoustupňový model na obrázku (1.3) platí

$$\begin{aligned} m\ddot{u} &= F(t) - F_k - F_c + F_{kd} + F_{cd} \\ m_d(\ddot{u} + \ddot{u}_d) &= -F_{kd} - F_{cd} \end{aligned} \quad (1.4)$$

po vyjádření sil a úpravě dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c\dot{u} - c_d\dot{u}_d + ku - k_d u_d &= F(t) \\ m_d\ddot{u} + m_d\ddot{u}_d + c_d\dot{u}_d + k_d u_d &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

kterou přepíšeme do maticového tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m_d & m_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c_d \\ 0 & c_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k_d \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ u_d \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1.6)$$

Rovnice (1.6) vyjadřuje soustavu diferenciálních rovnic.

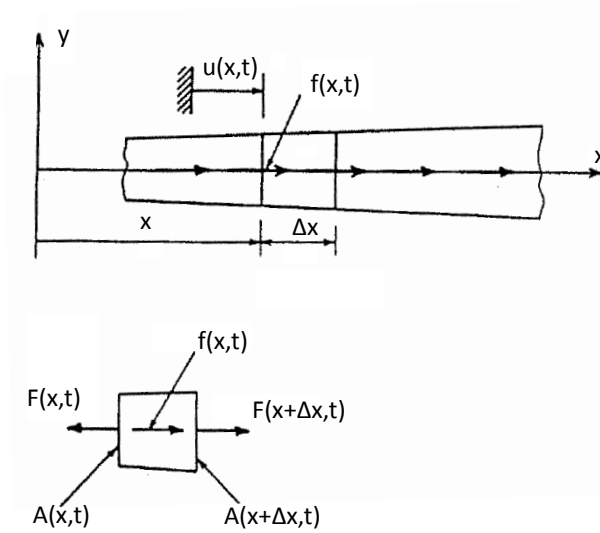
1.1.3 Spojitý model

Konstrukce jsou spojitě třírozměrné objekty a proto jsou nejvěrohodněji analyzovatelné spojitým modelem. Pro jednoduché případy jsou nalezena analytická řešení sloužící k porovnání výsledků diskrétních modelů. Pro většinu případů analytické řešení neexistuje a získává se pouze numerickými metodami.

Parametry modelu

Vstupními parametry jsou spojitě funkce vlastností materiálu a u prutových konstrukcí i charakteristiky průřezu. Vhodné je uvažovat konstantní funkce.

Vlastnosti materiálu jsou hustota ρ a Youngův modul pružnosti E , charakteristiky průřezu jsou plocha průřezu A , moment setrvačnosti I nebo polární moment setrvačnosti I_p , dle druhu namáhání prvku.



Obr. 1.4: Spojitý model a diferenciální element [4]

Odvození pohybové rovnice

Rovnice rovnováhy se sestavuje pro diferenciální element a má podobu parciální diferenciální rovnice, která v sobě zahrnuje konstitutivní vztah a podmínku spojitosti deformace.

Obrázek (1.4) znázorňuje spojitý model pro osově namáhaný prut a diferenciální element, na kterém je sestavena rovnice rovnováhy ve tvaru

$$\rho(x)A(x)\Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) = f(x, t)\Delta x + F(x + \Delta x, t) - F(x, t) \quad (1.7)$$

Vydělením rovnice členem Δx a dosazením za sílu $F(x, t)$, s využitím Hookova zákona

$$F(x, t) = A\sigma = AE\epsilon = AE \frac{\partial}{\partial x}u(x, t),$$

je pro $x \rightarrow 0$ získána pohybová rovnice podélného kmitání lineárně elastického prutu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

1.2 Řešení pohybových rovnic

V části 1.1 byly pro tři možné modely konstrukce odvozeny pohybové rovnice, které mají dle použitého modelu podobu diferenciální rovnice, soustavy n diferenciálních rovnic nebo parciální diferenciální rovnice. V této části bude pojednáno o způsobu jejich řešení.

1.2.1 Obyčejná diferenciální rovnice

Pro jednostupňový model má pohybová rovnice tvar (1.2) a dosazením $\zeta = \frac{c}{2\omega_n m}$ a $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ je převedena na tvar

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{1}{m}f(t). \quad (1.9)$$

Pokud m, c i k jsou konstantní, jde o obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty.

Obecné řešení této rovnice je součet komplementárního a partikulárního řešení. V dynamice je obecné řešení označováno jako celková odezva, která je složena z vynuceného a volného kmitání. Vynucené kmitání je závislé na zatížení a volné kmitání na počátečních podmínkách $u(0) = u_0$ a $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$.

Laplaceova transformace

Rovnici (1.9) lze řešit využitím *Laplaceovy transformace*, která převádí diferenciální rovnici v proměnné t na algebraickou rovnici v proměnné ω . Vyřešením algebraické rovnice je získáno řešení ve frekvenční oblasti a *zpětnou transformací* je převedeno na hledané řešení v časové oblasti.

Laplaceova transformace zapracovává do řešení obě počáteční podmínky a umožňuje řešení pro libovolnou zatěžovací funkci. Pro *zpětnou transformaci* je využívána *konvoluce*, která problém *zpětné transformace* převádí na řešení *Duhamelova integrálu*. Výsledkem je celkové řešení v časové oblasti ve tvaru

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n t}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) u_0 + e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{1}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \dot{u}_0 + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (1.10)$$

V prvních dvou členech jsou zahrnuty počáteční podmínky a třetí člen je *Duhamelův integrál*.

Laplaceova transformace neseperuje vynucené kmitání od volného a navíc *Duhamelův integrál* komplikuje získání analytického řešení i pro jednoduché zatěžovací funkce.

Metoda neurčitých koeficientů

Analytické řešení rovnice (1.9) s *harmonickým buzením* poskytuje metoda neurčitých koeficientů, která rovnici řeší odděleně pro volné kmitání s nulovou pravou stranou a vynucené kmitání. Důležitost *harmonického buzení* plyne z poznatku, že každou funkci lze na zvoleném omezeném intervalu nahradit *Fourierovou řadou* složenou ze *sinů* a *cosinů*.

Pro volné kmitání se předpokládá, že řešení je komplexní funkce ve tvaru $u = e^{ist}$, kde s je hledaná neznámá. Dosazením předpokládaného řešení do rovnice (1.9), s nulovou pravou stranou, se dostane *charakteristická rovnice*, která má dvě komplexně sdružená řešení $s_{1,2} = \zeta\omega_n i \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Obecné řešení volného kmitání je *lineární kombinací* obou *lineárně nezávislých* řešení a má tvar

$$u(t) = \overline{C}_1 u_1 + \overline{C}_2 u_2 = \overline{C}_1 e^{(-\zeta\omega_n + \omega_d i)t} + \overline{C}_2 e^{(\zeta\omega_n + \omega_d i)t}, \quad (1.11)$$

kde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ značí tlumenou úhlovou frekvenci a $\overline{C}_{1,2}$ jsou komplexně sdružené konstanty určené z počátečních podmínek. Protože řešení u_1 a u_2 jsou rovněž komplexně sdružené, imaginární části $u(t)$ se vzájemně odečtou a volné kmitání má, využitím *Eulerova vzorce* $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$, reálné řešení ve tvaru

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t), \quad (1.12)$$

kde $A_{1,2}$ jsou reálné konstanty.

Pro vynucené kmitání se předpokládá komplexní funkce zatížení $F e^{i\Omega t}$. Reálná a imaginární část funkce odpovídá buzení funkcí *cosinus* respektive *sinus* s úhlovou frekvencí Ω . Řešení $u(t)$ je hledáno ve tvaru $\overline{U} e^{i\Omega t}$, kde amplituda \overline{U} je obecně komplexní číslo a vystihuje velikost výchylky U i fázové posunutí θ oproti budící síle. Amplituda \overline{U} se vypočítá ze vztahu

$$\overline{U} = \frac{F}{k} \frac{1 - r^2 - 2\zeta r i}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} = U e^{-i\theta} = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} e^{-i\theta}, \quad (1.13)$$

kde $r = \Omega/\omega_n$ je frekvenční poměr a pro fázové posunutí platí $\tan \theta = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$.

Odezva konstrukce je stejně jako zatížení komplexní funkce, jejíž reálná a imaginární část odpovídá odezvě na buzení funkcí *cosinus* respektive *sinus*.

1.2.2 Soustava obyčejných diferenciálních rovnic

Řešení n stupňového modelu vede na soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic. Postupy řešení uvedené pro obyčejné diferenciální rovnice lze zobecnit i pro soustavy rovnic, ale pro praktické výpočty je efektivní *metoda rozkladu do vlastních tvarů*.

Metoda rozkladu do vlastních tvarů

Metoda využívá transformace pohybových rovnic do hlavních souřadnic η . V těchto souřadnicích soustava (1.6) přechází na soustavu

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\eta} + \bar{\mathbf{K}}\eta = \bar{\mathbf{F}} \quad (1.14)$$

kde $\bar{\mathbf{M}}$ a $\bar{\mathbf{K}}$ jsou diagonální matice hmotnosti a tuhosti označované jako modální. Diagonalita plyne z ortogonalit hlavních souřadnic η . Pokud je použito vztahu $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$, je diagonální i modální matice tlumení $\bar{\mathbf{C}}$ a (1.14) reprezentuje samostatné diferenciální rovnice.

Modální matice a modální zatěžovací vektor jsou dány vztahy

$$\bar{\mathbf{M}} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad \bar{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad \bar{\mathbf{C}} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi \quad \bar{\mathbf{F}} = \Phi^T \mathbf{F}$$

kde Φ je hledaná transformační matice složená z vlastních vektorů.

Transformační matice je získána řešením zobecněného problému vlastních čísel $\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u}$. Rovnici splňuje n vlastních čísel ω^2 a každému vlastnímu číslu přísluší vlastní vektor. Jednotlivé vlastní vektory tvoří sloupce transformační matice Φ .

Řešení ve fyzikálních souřadnicích \mathbf{u} je získáno transformačním vztahem $\mathbf{u} = \Phi \eta$.

1.2.3 Parciální diferenciální rovnice

Kmitání spojitého modelu je popsáno nehomogenní parciální diferenciální rovnicí doplněnou o okrajové a počáteční podmínky. Obecně v rovnici vystupují tři prostorové proměnné x , y , z a časová proměnná t . V takovém případě připadá v úvahu pouze numerické řešení které diskretizuje prostorové proměnné a převádí řešení spojitého modelu na řešení vícestupňového modelu. Pokud je uvažován pouze jednorozměrný problém, lze k řešení využít integrálních transformací nebo rozkladu do vlastních tvarů kmitu.

Integrální transformace

Integrální transformace, mezi které patří *Laplaceova* a *Fourierova* transformace, převádí parciální diferenciální rovnici v proměnné x a t na obyčejnou diferenciální rovnici v prostorové proměnné x . Transformace je použita rovněž na okrajové podmínky. Po vyřešení obyčejné diferenciální rovnice je nutné provést zpětnou transformaci. Úskalí spojené s integrální transformací spočívá právě ve zpětné transformaci, obdobně jako v případě použití *Laplaceovy transformace* na obyčejnou diferenciální rovnici popsané v části (1.2.1).

Metoda rozkladu do vlastních tvarů

Stejně jako v případě diskrétního modelu využívá metoda rozkladu do vlastních tvarů transformaci do hlavních souřadnic, ve kterých je řešení vyjádřeno jako součet vlastních funkcí daného netlumeného systému. Problém řešení parciální diferenciální rovnice je převeden na řešení zobecněného problému vlastních čísel.

Na rozdíl od diskrétního modelu, kdy byly k vlastním číslům přisuzovány vlastní vektory, jsou v případě spojitého modelu hledány vlastní funkce. Počet vlastních funkcí není teoreticky ničím omezen oproti vlastním vektorům omezených stupněm volnosti n . Z praktického hlediska je opodstatněné použití pouze několika prvních vlastních funkcí.

1.3 Dynamický model zatížení

Většina zatížení působící na stavební konstrukce vykazují časovou proměnnost a mohla by tedy být posuzována jako dynamická. Prakticky však hranice mezi dynamickým a statickým zatížením závisí na frekvenci zatížení a vlastní frekvenci konstrukce na kterou působí.

Zatížení uvažovaná jako statická popřípadě kvazistatická mají podstatně nižší frekvence ve srovnání s vlastní frekvencí konstrukce. Naproti tomu dynamická zatížení jsou charakterizována relativně rychle se měnícím zatížením vzhledem k vlastní periodě konstrukce. Dochází k iniciaci nezanedbatelných setrvačných a tlumících sil, které musí být zahrnuty ve výpočtu.

Mezi typická dynamická zatížení patří zemětřesení, výbuch, náraz, působení větru a další. Liší se od sebe původem vzniku a dobou po kterou na konstrukci působí.

Podkapitola dále popisuje zatížení vyvolané pohybem chodců působící na lávky pro pěší.

1.3.1 Zatížení chodci

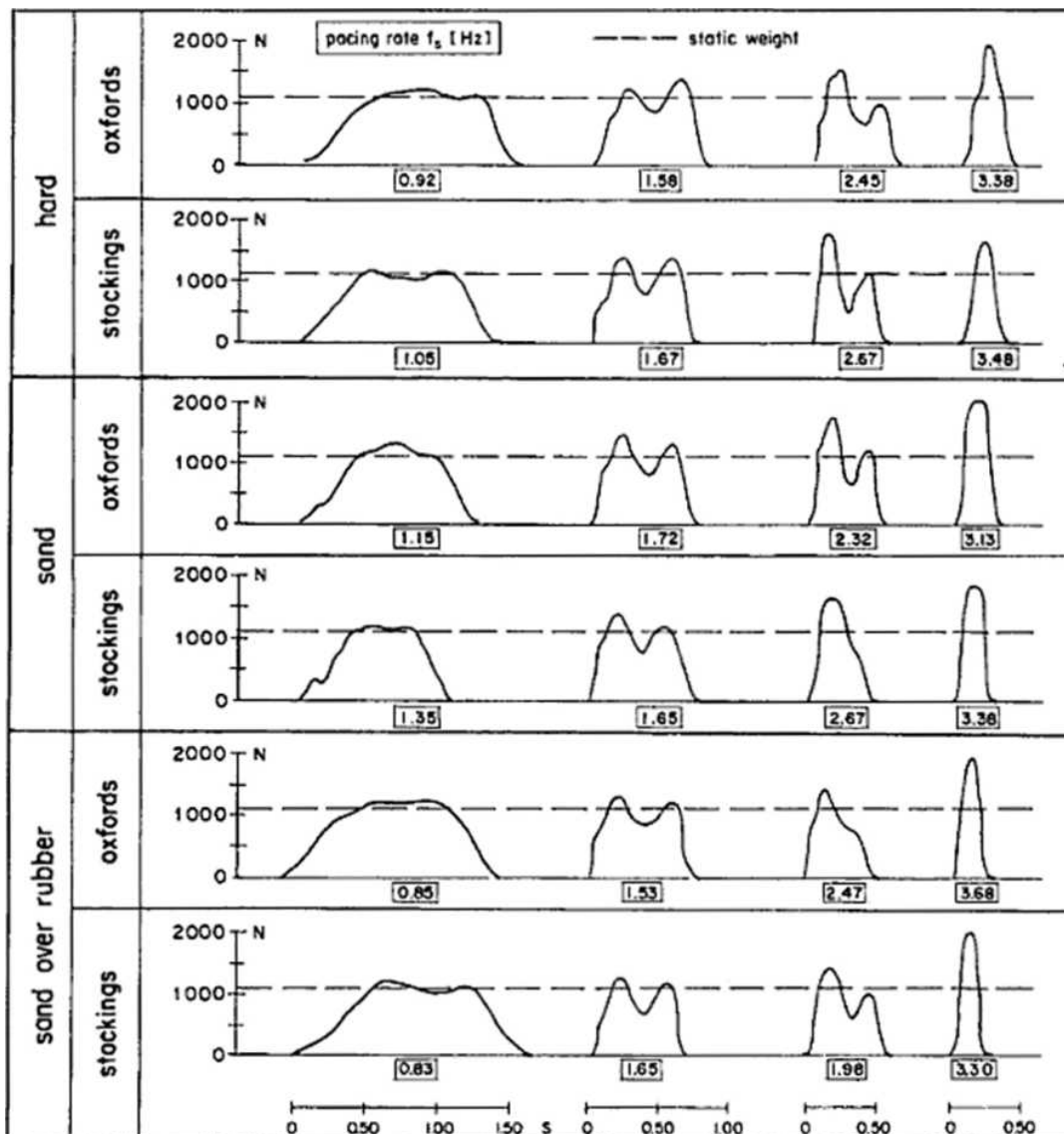
Během chůze vykonává těžiště lidského těla sinusový pohyb ve vertikálním i horizontálním směru. Lidská chůze podle její rychlosti a způsobu vyvoluje na konstrukci odlišnou periodickou sílu ve svislém, příčném i podélném směru. Ukazuje se, že tato síla není čistě harmonická funkce s frekvencí chůze, ale objevují se i vyšší a nižší frekvence.

Dalším aspektem je možnost výskytu více chodců najednou a jejich možná synchronizace, čímž se navýší amplituda budící síly.

Vliv jednoho chodce

Studiem lidské chůze byl zjištěn průběh vertikální síly na kontaktu mezi chodidlem a konstrukcí během jednoho kroku. Práce [1] uvádí, že průběh mohou ovlivnit následující faktory, z nichž rozhodující vliv má frekvence chůze.

- frekvence chůze
- druh došlapu
- váha chodce
- pohlaví chodce
- druh obuvi
- druh povrchu



Obr. 1.5: Záznam svislé složky pro různé povrchy a frekvence [1]

Na obrázku (1.5) jsou zaznamenány průběhy svislé složky pro různé frekvence, druhy povrchu a obutí. Obrázek ilustruje, že průběh sil se se změnou povrchu a volbou obutí podstatně nemění a zachovává se charakter určený frekvencí chůze.

Frekvenci, neboli počet kroků za sekundu, lze na základě délky kroku svázat s rychlostí chůze (tabulka 1.1). Rychlost i délka kroku se mohou měnit dle aktuální potřeby chodce a individuální povahy jeho chůze. To má za následek náhodný charakter frekvence. Přibližně vystihuje náhodnost Gaussovo rozdělení se střední hodnotou 2,0 Hz a směrodatnou odchylkou 0,13 až 0,18 Hz.

Pro pomalou chůzi zatížení téměř nepřesáhne statickou sílu (1100 N pro daný záznam) a interval mezi došlápnutím na patu (první kopeček) a odrazem přes špičku do dalšího kroku (druhý kopeček) je málo patrný. Rozpoznat lze pro běžnou chůzi

	f [Hz]	v [m/s]
pomalá chůze	$\sim 1,7$	1,1
normální chůze	$\sim 2,0$	1,5
rychlá chůze	$\sim 2,3$	2,2
pomalý běh	$\sim 2,5$	3,3
rychlý běh	$> 3,2$	5,5

Tab. 1.1: Svázání rychlosti a frekvence chůze

uvažovanou frekvencí 1,5 Hz - 2,5 Hz. S rostoucí rychlostí se interval zkracuje až nakonec úplně vymizí.

Záznam při běhu se podobá rychlé chůzi, ale špičatý charakter je dán dopadem pouze na přední část chodidla a nikoli vymizením přechodu mezi dopadovou a odrazovou částí kroku.

Spojité funkce zatížení Chůzi charakterizuje spojitý záznam daný skutečností, že při došlápnutí na přední nohu zůstává zadní odrazová noha stále v kontaktu s podkladem. Tímto se chůze odlišuje od běhu, kdy v kontaktu zůstává pouze jedno chodidlo a dochází k nespojitému záznamu. Rovněž síla může při rychlém běhu dosahovat až trojnásobek statické hodnoty.

Funkce zatížení může být idealizována *Fourierovým rozvojem* s uvažováním prvních tří harmonických členů.

$$F_p(t) = G + \Delta G_1 \sin(2\pi f_s t) + \Delta G_2 \sin(4\pi f_s t - \varphi_2) + \Delta G_3 \sin(6\pi f_s t - \varphi_3), \quad (1.15)$$

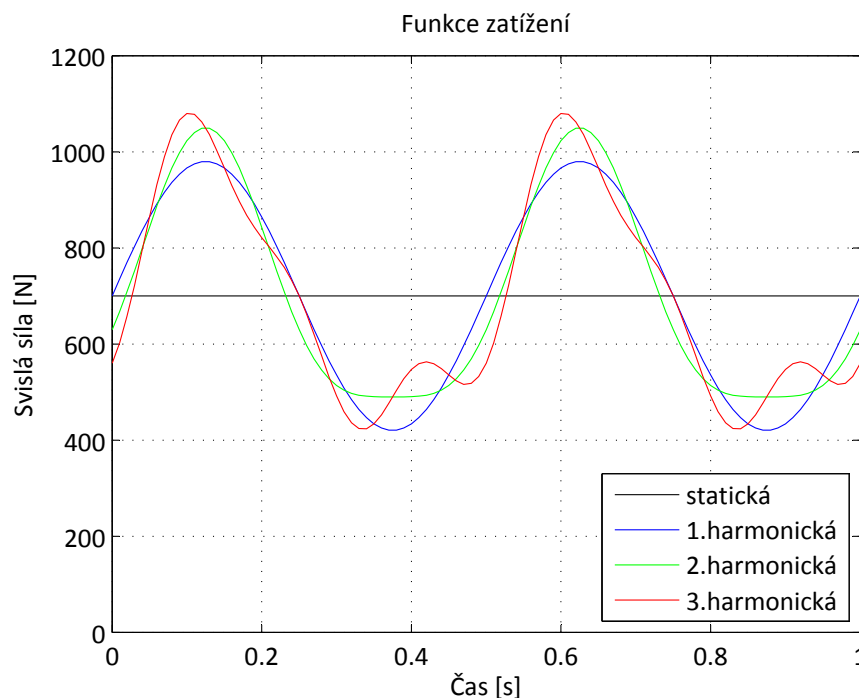
kde

G	tíha osoby
ΔG_1	amplituda 1. harmonického členu
ΔG_2	amplituda 2. harmonického členu
ΔG_3	amplituda 3. harmonického členu
f_s	frekvence chůze
φ_2	relativní fázový úhel mezi 1. a 2. harmonickým členem
φ_3	relativní fázový úhel mezi 1. a 3. harmonickým členem

Vyšší harmonické členy již nemají podstatný vliv. Hodnoty jednotlivých amplitud pro $f_s = 2,0$ Hz navrhuje [1] následovně:

$$\Delta G_1 = 0,4G \quad \text{a} \quad \Delta G_2 \cong \Delta G_3 \cong 0,1G$$

Hodnoty fázových úhlů φ_2 a φ_3 vykazují značný rozptyl, ale pro výpočty lze použít $\varphi_2 \cong \varphi_3 \cong \frac{\pi}{2}$.



Obr. 1.6: Funkce zatížení

Obrázek (1.6) ilustruje příspěvky jednotlivých harmonických členů pro volbu statické síly 700 N. Lze vypožorovat, že 2. a 3. harmonický člen pouze mírně navýší maximální sílu a zatěžovací funkci rozvlní, ale charakteristického sedlovitého tvaru v místě maxima není dosaženo.

Tento nedostatek by napravilo přidání dalších členů a úprava fázových posunutí, ale přihlédnutím ke všem aproximacím vstupujících do výpočtu, to není potřeba. Někdy je dokonce oprávněné použití pouze 1. členu.

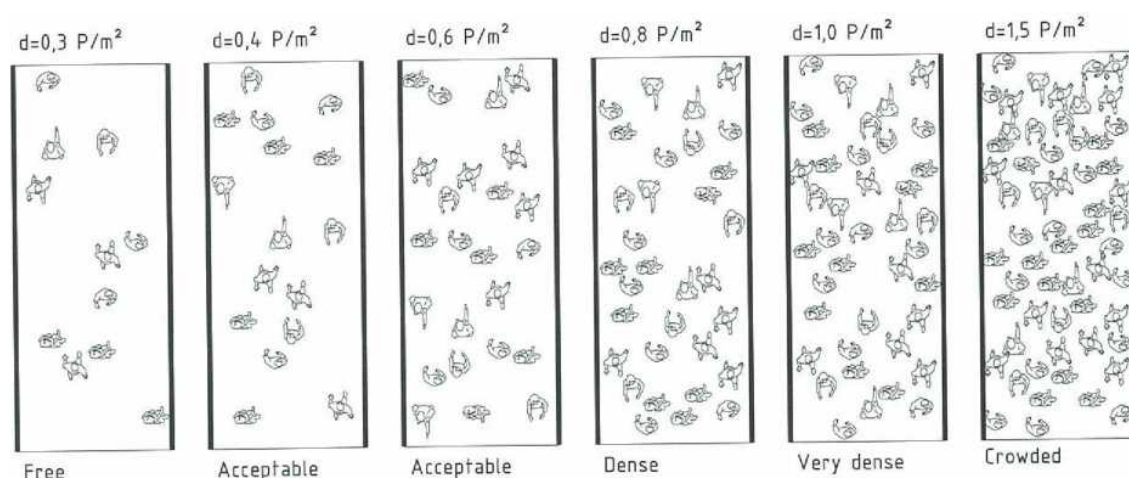
Vliv skupiny chodců

Při výskytu více než jedné osoby je nutné uvažovat kombinaci jejich účinků na konstrukci. Chodci mají obecně individuální frekvenci kroku nebo mohou být vzájemně fázově posunuti, proto nelze násobit účinek jednoho chodce počtem chodců na mostě pro získání celkové odezvy. Při výpočtu se uvažuje s jevem synchronizace a plošnou hustotou výskytu chodců, zaručující nenarušený individuální krok každého chodce.

Synchronizace Část chodců vyskytující se současně na konstrukci s vzájemně odlišnou fází a frekvencí kroku svůj krok po určité době podvědomě synchronizuje. Frekvence chůze takhle synchronizované skupiny je shodná s vlastní frekvencí konstrukce. Dochází tedy k sjednocení fází mezi chodci a pohybem chodců s pohybem

konstrukce. Jev je typický pro vodorovný směr, ale pro větší posuny je pozorovatelný i ve svislém směru, kdy chodec není schopen udržet původní krok, přepadává a přizpůsobuje krok pohybu povrchu.

Celkový počet chodců, mezi kterými se vytváří synchronizované skupiny, je dán rozměry mostovky konstrukce a uvažovanou plošnou hustotou chodců. Tato hustota by měla umožnit neomezený pohyb jednotlivých chodců náhodně rozprostřených na mostovce. V práci [1] jsou zmiňované limitní hodnoty 1,6 až 1,8 osob/m² s poznámkou, že hodnota 1,0 osob/m² je více realistická. Práce [3] uvádí, že již při hustotě 0,6 osob/m² je možné pocítit omezení pohybu. Přibližně znázorňuje náhodné zaplnění mostovky pro různé hustoty chodců obrázek (1.7).



Obr. 1.7: Různé hodnoty hustoty chodců [3]

Postup k určení vlivu skupiny chodců podává práce [1], kde se zavádí násobitel $m = \sqrt{\lambda T_0}$, kterým se násobí účinek jednoho chodce.

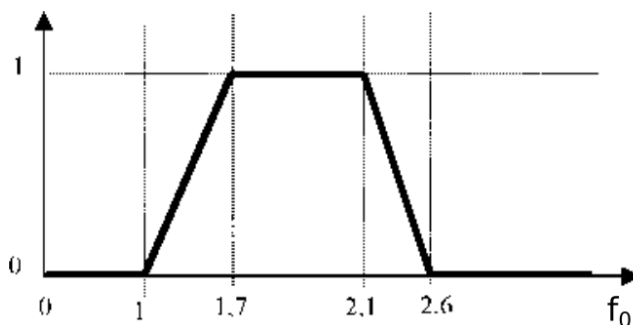
$$\begin{array}{ll} \lambda & \text{proud příchozích chodců za jednotku času} \quad [\text{osob/s}] \\ T_0 & \text{čas potřebný pro překonání mostu} \quad [\text{s}] \end{array}$$

Člen λT_0 reprezentuje počet chodců na konstrukci. Násobitel m vyjadřuje ekvivalentní počet chodců synchronizovaných ve fázi i frekvenci, mající stejný účinek jako skupina N osob s náhodně rozdělenými frekvencemi a fázemi.

Technický průvodce [2] navrhuje ekvivalentní počet chodců vztahem

$$N_{eq} = 10,8 \sqrt{N\zeta},$$

kde ζ značí kritický útlum. Dále zavádí redukční faktor ψ , určený na základě vlastní frekvence konstrukce, dle obrázku (1.8). Faktor ψ vyjadřuje nižší pravděpodobnost výskytu rezonance pro konstrukce s vlastní frekvencí mimo základní rozsah frekvence lidské chůze.

Obr. 1.8: Redukční součinitel ψ [2]

1.3.2 Posouzení

Pro konstrukce zatížené chodci je rozhodujícím kritériem posouzení vlivu vibrací konstrukce na člověka. Člověk vnímá negativněji vibrace způsobené někým jiným, než ty které způsobuje sám. Proto se uvažuje osoba stojící na konstrukci, na kterou působí vibrace vzniklé pohybujícími se chodci. Posouzení vibrací se provádí ve zrychleních, protože je na ně člověk citlivější, než na posuny, popřípadě rychlosti.

Každý vnímá vibrace odlišně a navíc do procesu vnímání vstupuje spousta ovlivňujících faktorů. To komplikuje snahy o nalezení obecně platného prahu vnímání a stanovení limitní hodnoty zaručující komfortní užívání. Prahy vnímání jsou získány na základě experimentů, a proto se výsledky mohou dle autorů lišit. Možné prahey vnímání v závislosti na frekvenci ilustruje obrázek (1.9).

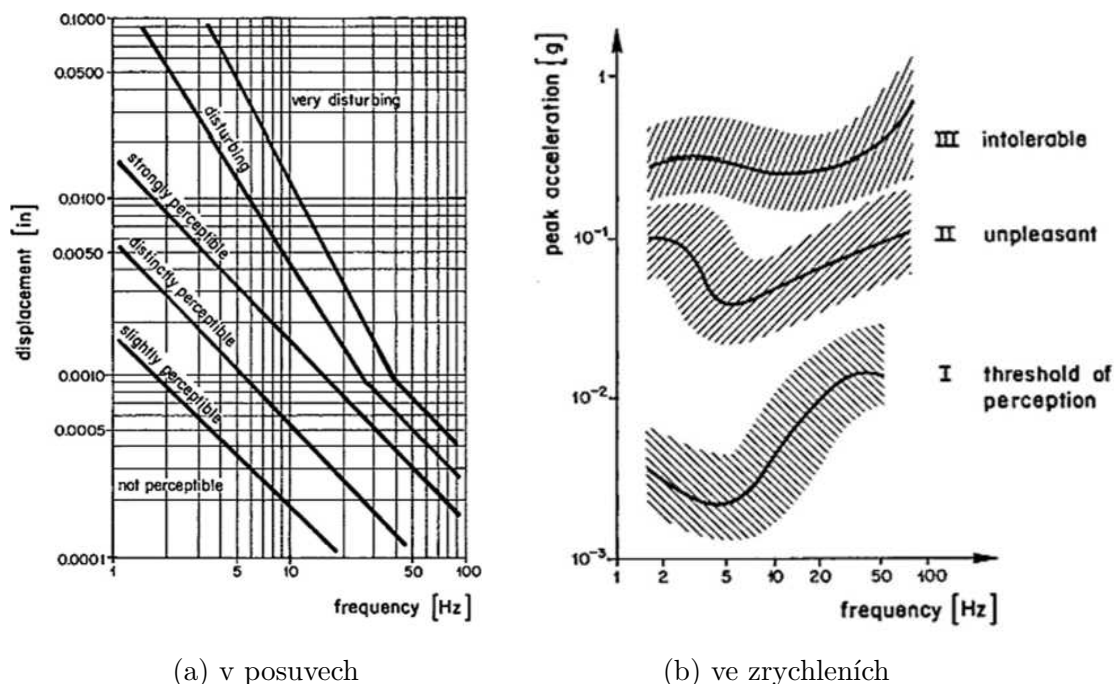
Obrázek (1.9a) dokládá skutečnost, že člověk je schopný vnímat vibrace i o velmi malých výchylkách a rušivě pociťuje vibrace o vyšších frekvencích. Například pro vibrace o frekvenci 2 Hz, odpovídající buzení lidskou chůzi, dává obrázek (1.9a) spodní hodnotu amplitudy pro rušivé vibrace 0,05 palců, převedeno do metrické soustavy, přibližně 1,25 milimetrů. Použitím vztahu $\ddot{u} = (2\pi f)^2 u$ lze získat odpovídající kritérium pro zrychlení $0,2 \text{ m/s}^2$.

Odlišnou hodnotu $1,0 \text{ m/s}^2$ poskytuje obrázek (1.9b), který citlivost vyjadřuje přímo ve zrychleních. Z praktického hlediska jsou důležité limity, které udávají platné normy, předpisy nebo standardy.

Eurokód

Eurokód, jako skupina jednotných norem platných pro evropské země, zmiňuje komfortní kritéria i požadavky na dynamický výpočet konstrukcí.

Je známo, že člověk vnímá odlišně vertikální a horizontální vibrace, a Eurokód tento poznatek bere v úvahu. V této práci jsou ale uvažovány pouze vertikální vibrace.



Obr. 1.9: Vnímání vibrací [1]

Eurokód 0 V příloze A2, vztahující se k mostům, dává limity pro zrychlení a specifikuje, kdy má být proveden dynamický výpočet.

V příloze A2 odstavci 4.3.2 se zmiňuje, že posuzovat se má ve zrychleních a limitní hodnota zrychlení pro vertikální vibrace, zaručující pohodu uživatelů, je $0,7 \text{ m/s}^2$.

Komfortní kritérium má být ověřeno dynamickým výpočtem pro konstrukce, které mají základní vlastní frekvenci nižší než 5 Hz.

Oblast frekvencí při kterých může dojít k rezonanci ve vertikálním směru je stanovena na hodnotu 1-2,5 Hz, což je téměř ve shodě s obrázkem (1.8) uvedeným v technickém průvodci [2].

Měla by se uvažovat návrhová situace zahrnující skupinu, čítající 8 až 15 osob, které se současně vyskytují na mostě.

Eurokód 1-2 Určuje zatížení na mostní konstrukce, ale v kapitole 5.7. *Dynamické modely zatížení chodci*, nespecifikuje konkrétní zatěžovací model, který by měl být použit pro dynamický výpočet.

Zmiňuje se zde pouze nutnost stanovení vlastní frekvence konstrukce na vhodném výpočtovém modelu, definování vhodného dynamického modelu zatížení a kritéria pohody uživatelů. Navíc se upozorňuje na možný výskyt rezonančního kmitání.

Dynamický účinek chodců přispívá spíše k únavovému namáhání, než že by zapří-

činil kolaps konstrukce překonáním její únosnosti. Posouzení vibrací spadá do mezního stavu použitelnosti, a pokud požadavky na kmitání nejsou splněny, mají být upraveny dynamické charakteristiky konstrukce, nebo se má uvažovat o instalaci omezovače kmitání. Limitní hodnoty kmitání by měli zaručit kompromis mezi ekonomickým návrhem konstrukce a pohodou uživatelů.

2 ANALÝZA LÁVKY PRO PĚŠÍ

2.1 Popis konstrukce

Jedná se o ocelovou lávku pro pěší na řece Jizeře v Mladé Boleslavi. Lávka slouží pro pěší a vzhledem k šířce mostovky umožňuje výjimečný pojezd vozidel do 3,5 tuny. Pohled na lávku je na obrázku (2.1).



Obr. 2.1: Pohled na analyzovanou lávku pro pěší [9].

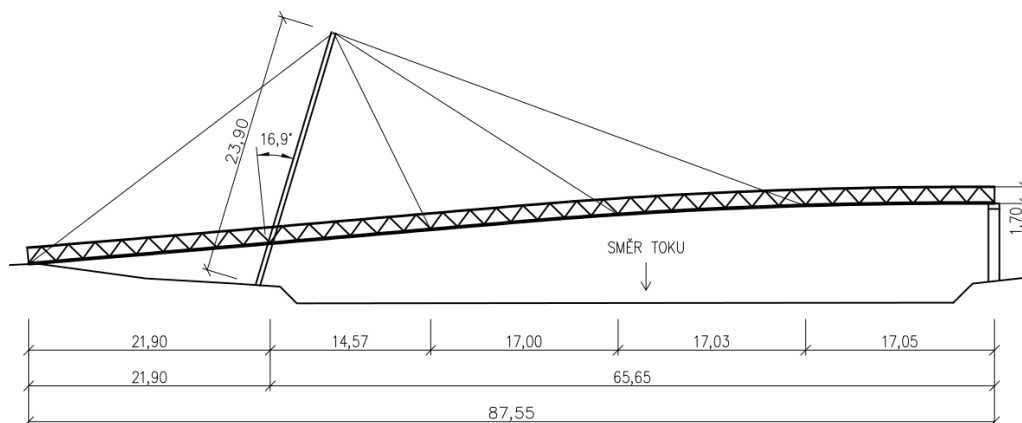
Lávka je provedena jako zavěšená konstrukce s otevřenou dolní mostovkou šířky 4,50 metrů, tvořenou dřevěnými hranoly. Šikmý ocelový pylon ve tvaru písmene "A" výšky 23,9 metrů a odklonem od svislice 16,6 stupňů rozděluje lávku na dvě pole délky 65,65 a 21,9 metrů. Pole jsou tvořeny ocelovou příhradovou konstrukcí výšky 1,7 metrů. Větší pole překlenuje řeku Jizeru a je podporováno třemi dvojicemi táhel zavěšených na pylonu. Táhla svojí tuhostí vytváří v poli pružné vnitřní podpory, umístěné od pylonu ve vzdálenosti 14,57 metrů a s vzájemnými odstupy 17,00 a 17,03 metrů.

Táhla podporující hlavní pole způsobují značné vodorovné namáhání pylonu v místě zavěšení. Proto je pylon v opačném směru zajištěn dvojicí táhel zakotvených na pravém břehu do opěry. Popis geometrie konstrukce doplňuje schématický náčrt (2.2).

Veškeré údaje o konstrukci byly získány z práce [9].

2.1.1 Vlastní frekvence konstrukce

Každé konstrukci přísluší vlastní frekvence, které dávají představu o tom, jak velký dynamický účinek na konstrukci bude mít dynamické zatížení, například chodci. Určení těchto frekvencí je poměrně náročné a bez využití výpočetní techniky lze získat



Obr. 2.2: Schématický náčrt konstrukce.

pouze přibližné hodnoty.

V práci byly vyzkoušeny tři přístupy, z nichž dva poslední se neobešly bez použití výpočetního softwaru a podrobného prostorového prutového modelu, poskytnutého vedoucím práce.

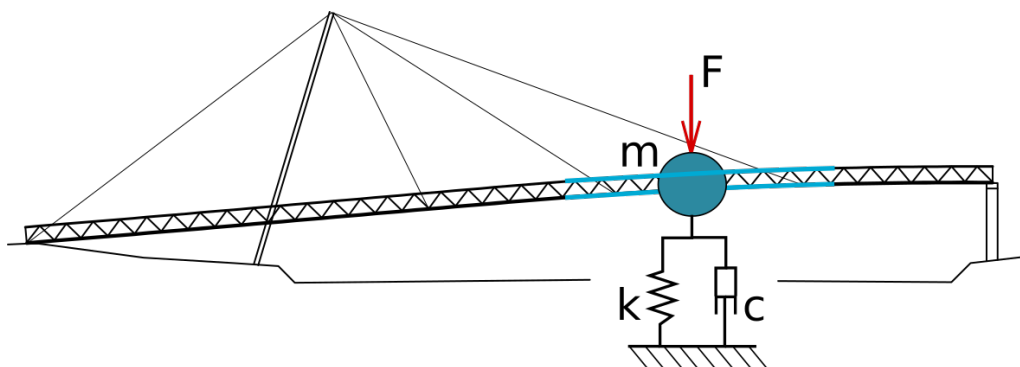
První odhad vlastní frekvence dává empirický vzorec, uvedený v [7] v kapitole studující dynamický účinek větru na zavěšené mosty.

$$f_v = \frac{110}{L} = \frac{110}{65,65} = 1,676 \text{ [Hz]}, \quad (2.1)$$

kde

f_v	první ohybová vlastní frekvence	[Hz]
L	délka hlavního pole	[m]

Druhý přístup spočívá v nalezení první vlastní frekvence jednostupňového modelu nahrazující dynamické chování studované lávky pro pěší. Přesnost takového výpočtu závisí na správném stanovení parametrů modelu.



Obr. 2.3: Lávka pro pěší nahrazena jednostupňovým modelem.

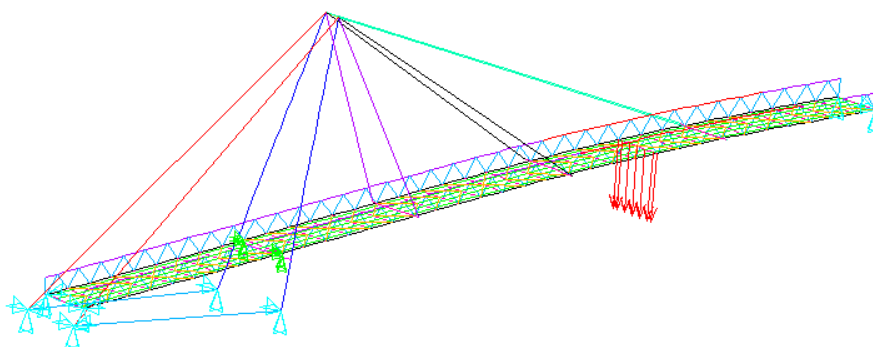
Při idealizaci prostého nosníku jednostupňovou soustavou bývá uvažována hmota m rovna polovině celkové hmotnosti nosníku. V případě řešené konstrukce byl učiněn předpoklad, že kmitá pouze ocelová konstrukce spojitého nosníku v délce 30 metrů hlavního pole, dle obrázku (2.3). Hmotnost spojitého nosníku na běžný metr byla stanovena ve výši 950 kg/m a kmitající hmota m byla uvažována hodnotou

$$m = 950L = 950 \cdot 30 = 28\,500 \text{ [kg]}.$$

Tuhost k byla získána ze vztahu známého z lineární statiky

$$F = ku \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{F}{u} = \frac{70}{22,600} 10^6 = 3\,097\,345 \text{ [N/m]}$$

Síla F , umístěna mezi dvě krajní táhla dle obrázku (2.4), byla volena 70 kN a svislá deformace u byla určena lineárním výpočtem na prutovém modelu v systému ANSYS.



Obr. 2.4: Prostorový prutový model poskytnutý vedoucím práce.

Vlastní frekvenci jednostupňového modelu, z obrázku (2.3), definuje vztah

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\,097\,345}{28\,500}} = 1,659 \text{ [Hz]},$$

který plyne z řešení obyčejné diferenciální rovnice (1.2), popisující jednostupňový výpočtový model.

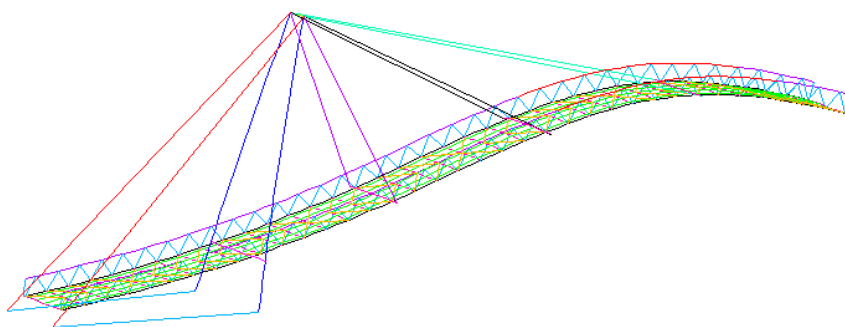
Nejpřesnější hodnotu podává poslední postup, při kterém byla provedena *modální analýza* v systému ANSYS pro výpočet několika prvních vlastních frekvencí prutového modelu.

ANSYS nabízí několik metod pro řešení problému vlastních čísel. Byla ponechána přednastavená metoda *Block Lanczos* s požadavkem na určení dvaceti prvních vlastních frekvencí. Mezi získanými vlastními tvary byl vybrán první a druhý ohybový

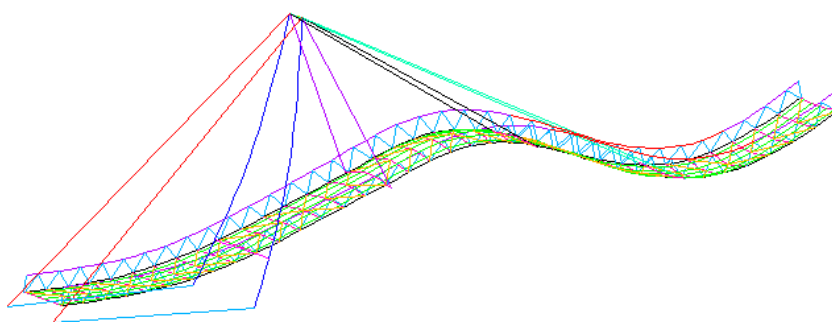
tvary, zobrazeny na obrázku (2.5). Oba tvary jsou charakterizované svislou deformací mostovky s jednou, v případě prvního tvaru, a dvěma půlvlnami. Jiné, například torzní, tvary nebyly v práci uvažovány. Pořadové číslo vlastních ohybových tvarů a frekvence jsou:

n	frekvence	tvar kmitu
2	1,806	1. ohybový tvar
7	4,635	2. ohybový tvar

Použitá metoda *Block Lanczos* spadá do skupiny transformačních metod, které využívají transformace podobnosti k převedení původní matice problému na tvar vhodnější k řešení vlastních čísel. Konkrétně metoda *Block Lanczos* převádí matici na třídiagonální tvar. Použitá transformace podobnosti zaručuje shodnost vlastních čísel původní a transformované matice.



(a) 1. ohybový tvar $f=1,806$ Hz



(b) 2. ohybový tvar $f=4,635$ Hz

Obr. 2.5: Tvary kmitání.

Porovnáním výsledků získaných jednotlivými přístupy lze vyhodnotit:

- Vlastní frekvence jednostupňového modelu je podstatně nižší než frekvence vypočtená na prutovém modelu, takže předpoklad o kmitající části mostovky v délce 30 metrů nebyl správný, a pro další výpočty je kmitající hmota m upravena na hodnotu 24 000 kg, tak aby se vlastní frekvence jednostupňového modelu shodovala s komplexním prutovým modelem.
- První odhad daný empirickým vzorcem dal, v tomto konkrétním případě, poměrně dobrou počáteční představu o skutečné vlastní frekvenci. Nižší frekvence může být dána skutečností, že vztah (2.1) slouží k aproximaci vlastní frekvence zavěšených mostů velkých rozpětí, jejichž vlastní frekvence je kolem 0,5 Hz.

Snížení hmoty zvětšilo vlastní frekvenci jednostupňového modelu na

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\,097\,345}{24\,000}} = 1,808 \text{ [Hz]}$$

a kmitající část mostovky byla změněna na 25,3 metrů.

2.2 Dynamická odezva

Z porovnání vypočtené vlastní frekvence s požadavky platných evropských norem, které požadují plyne nutnost dynamického výpočtu lávky na zatížení chodci.

Dynamická odezva lávky pro pěší byla počítána na idealizovaném jednostupňovém modelu. Parametry modelu, hmotnost m a tuhost k byly již stanoveny během výpočtu vlastní frekvence. Tlumení lávky, s ohledem na ocelovou konstrukci, bylo vyjádřeno poměrným útlumem $\zeta = 0,5 \%$.

Zatížení chodci bylo uvažováno dle literatury [1] a [2] popsané v (1.3.1). Takto stanovené zatížení je funkcí vlastní frekvence. Technický průvodce [2] navrhuje použití vlastní frekvence vypočtené za předpokladu prázdné a plné mostovky. Pro plnou mostovku se uvažuje dodatečná rovnoměrně rozprostřená hmota o velikosti 70 kg/m^2 , reprezentující hmotu chodců o hustotě $1,0 \text{ osob/m}^2$.

Vlastní frekvence plné mostovky byla zjednodušeně stanovena přidáním hmotnosti chodců na kmitající části mostovky.

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + m_c}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\,097\,345}{24\,000 + 8\,000}} = 1.566 \text{ [Hz]},$$

kde $m_c = 4,5 \cdot 70 \cdot 25,3 \approx 8\,000 \text{ kg}$.

2.2.1 Vliv jednoho chodce

Odezva vybuze na pohybem jediného chodce po konstrukci, s prázdnou mostovkou, je určena řešením diferenciální rovnice (1.9) s počátečními podmínkami:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{1}{m}\psi f(t) \quad u(0) = 0 \text{ a } \dot{u}(0) = 0$$

s pravou stranou

$$f(t) = 280 \sin(2\pi ft) + 70 \sin\left(4\pi ft - \frac{\pi}{2}\right) + 70 \sin\left(6\pi ft - \frac{\pi}{2}\right)$$

a hodnotami

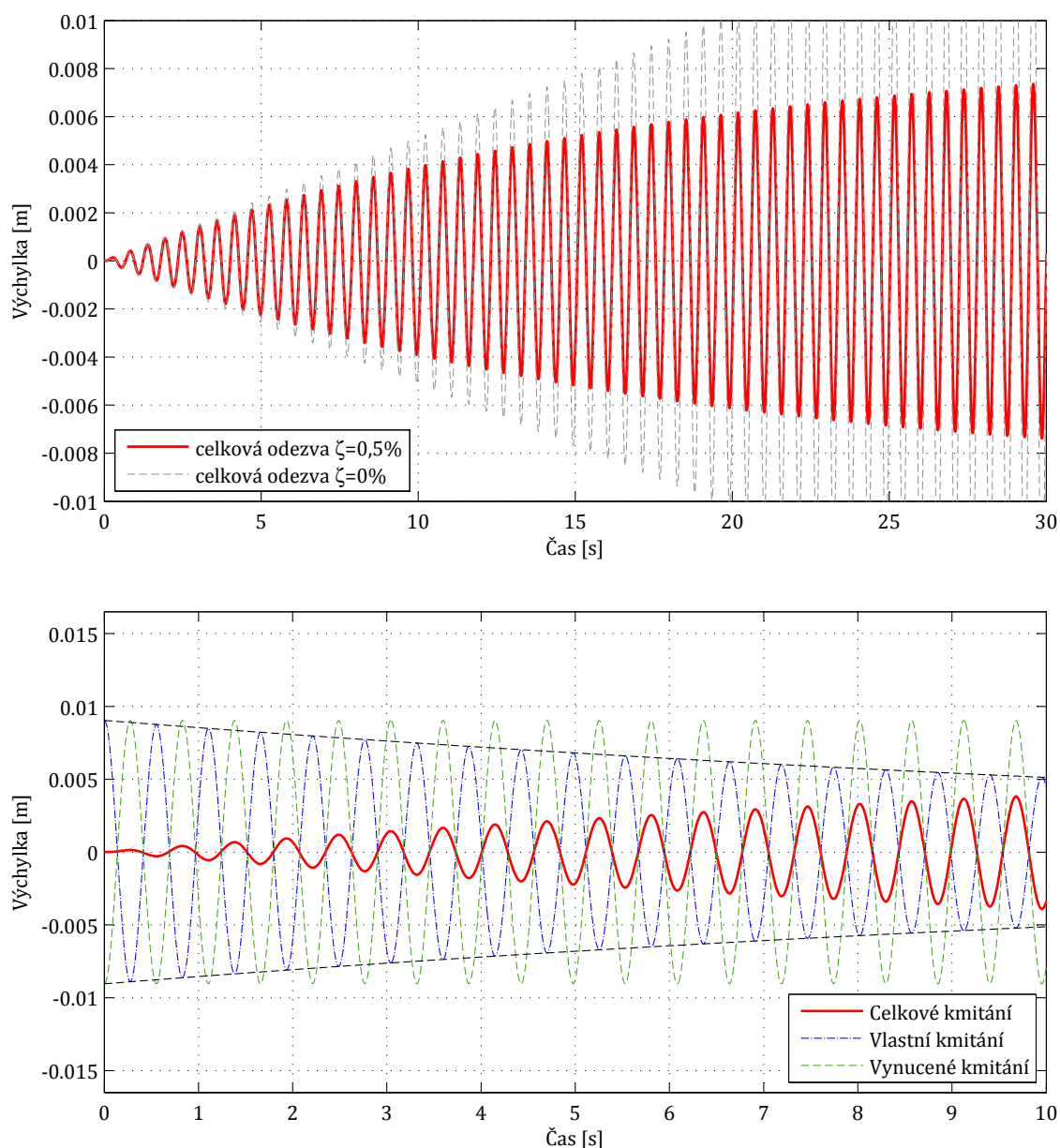
$$f = 1,808 \text{ [Hz]} \quad \zeta = 0,005 \text{ [-]} \quad m = 24\,000 \text{ [kg]} \quad \omega_n = 2\pi f = 11,36 \text{ [rad/s]}.$$

Řešením je superpozice účinků jednotlivých harmonických členů. Rozhodující vliv má první člen, který je v rezonanci s konstrukcí a má největší amplitudu. Druhý a třetí člen by nabyl na důležitosti v případě, že by způsobil rezonanční kmitání vyšších vlastních tvarů.

Horní graf obrázku (2.6) zobrazuje celkové řešení, složené z volného a buze-ného kmitání pro první harmonický člen s dobou působení, volenou pro přehlednost,

30 sekund. Odezva se ustálí na hodnotě 9 mm. Graf navíc srovnává neomezeně rostoucí netlumenou odezvu s tlumenou odezvou za rezonance.

Dolní graf obrázku (2.6) na krátkém časovém intervalu demonstruje příspěvek volného kmitání, s exponenciálně tlumenou amplitudou v čase, a vynuceného kmitání k celkové odezvě. Volné a vynucené kmitání mají opačnou fázi a celková odezva roste pouze vlivem útlumu volného kmitání až do dosažení vynucené odezvy, která je fázově posunuta o $-\frac{\pi}{2}$ proti průběhu budící síly.

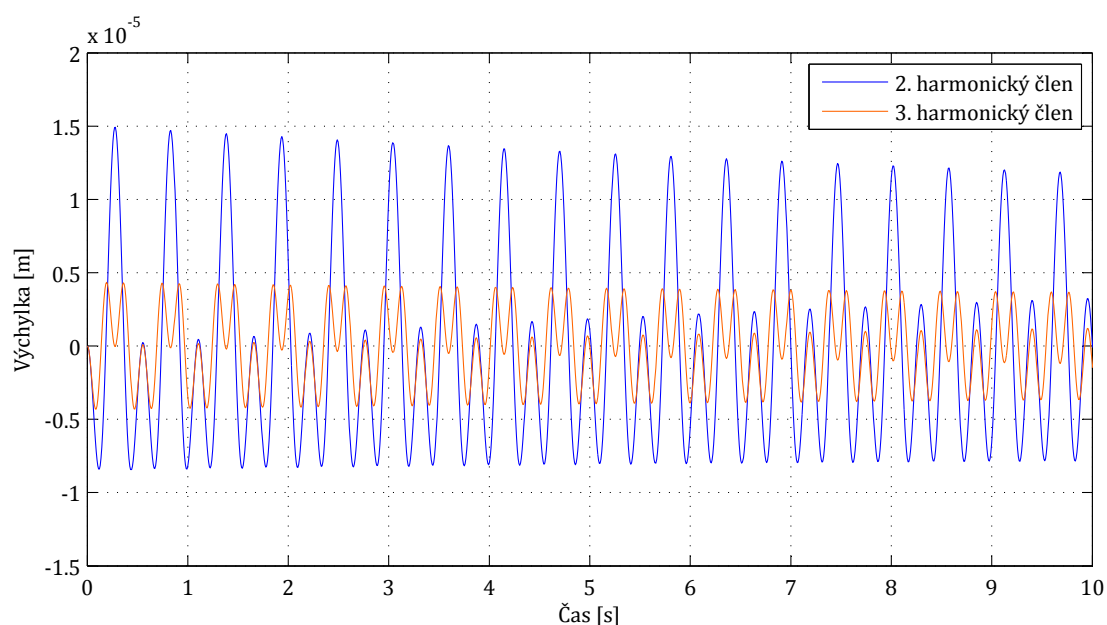


Obr. 2.6: Odezva na 1. harmonický člen.

Řádově nižší příspěvek 2. a 3. harmonického členu k celkové amplitudě kmitání

dokládá obrázek (2.7) a přírůstek ke zrychlení činí pouze 0,008 m/s².

S ohledem na tento výsledek je dále uvažován pouze 1. harmonický člen.



Obr. 2.7: Příspěvek od 2. a 3. harmonického členu.

Účinek jednoho chodce shrnuje tabulka (2.1) s hodnotami dosaženými v čase 90 sekund. Nepříznivěji vychází pohyb chodce po prázdné mostovce, kdy konstrukci přísluší vyšší vlastní frekvence a následně i větší amplituda zrychlení. Roli zde se hrála i nižší pravděpodobnost výskytu chodce s frekvencí chůze 1,566 Hz, vyjádřená redukčním součinitelem ψ , závislým na frekvenci podle obrázku (1.8) v části (1.3.1). V obou případech je dosaženo vysokých hodnoty zrychlení.

mostovka	f [Hz]	ψ	odezva		
			u [m]	\dot{u} [m/s]	\ddot{u} [m/s ²]
prázdná	1,808	1,00	0,009	0,102	1,160
plná	1,566	0,81	0,007	0,071	0,700

Tab. 2.1: Vliv jednoho chodce.

2.2.2 Vliv skupiny chodců

Vliv skupiny chodců byl v práci vystižen postupem uvedeným v technickém průvodci [2]. Za tímto účelem byla studovaná lávka zařazena do třídy III (standardní konstrukce lávek, které mohou být příležitostně využity velkou skupinou osob, ale nikdy nebudou obsazeny v celé ploše mostovky.), specifikující úroveň zatížení dopravou.

Pro zvolenou třídu se má uvažovat plošná hustota proudu chodců $0,5 \text{ osob/m}^2$. Tomu odpovídá $0,5 \cdot 4,5 \cdot 87,55 \approx 197$ osob, současně se vyskytujících na mostovce, po dobu potřebnou k dosažení maximálního zrychlení při rezonanci (dosažení ustálené odezvy). Odpovídající ekvivalentní počet chodců synchronizovaných v rezonanci s konstrukcí je

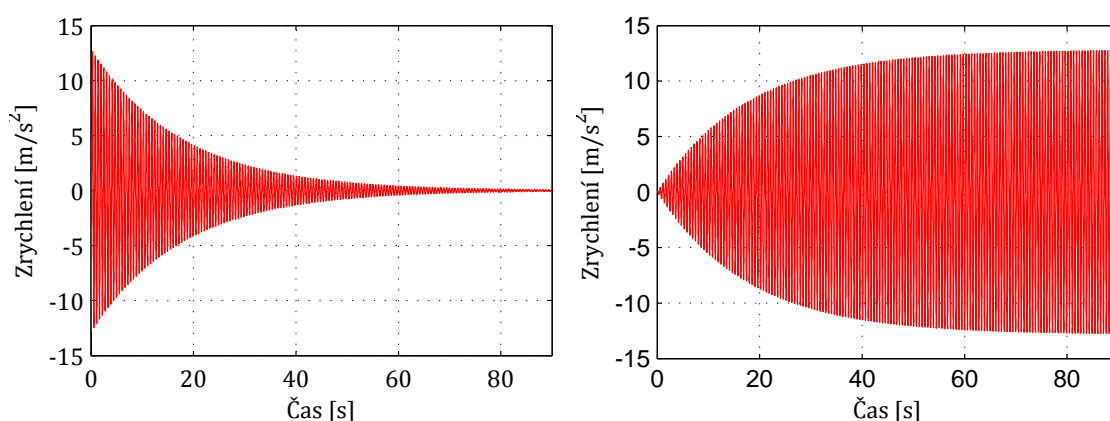
$$N_{eq} = 10,8\sqrt{N\zeta} = 10,8\sqrt{197 \cdot 0,005} \approx 11 \text{ [osob]}$$

a zatížení má podobu

$$f(t) = 280N_{eq} \sin(2\pi ft).$$

Vlastní frekvence konstrukce a současně frekvence zatížení byla uvažována ve třech konfiguracích, aby se částečně vystihla její proměnnost s rostoucím počtem osob na mostovce. První případ přidavnou hmotnost osob na lávce neuvažuje, druhý zahrnuje hmotnost všech osob a poslední polovinu osob.

Odezvu ve zrychlení v časové oblasti pro dominantní první případ dokumentuje obrázek (2.8). Z časové oblasti lze zjistit v jakém čase nastává ustálená odezva. Teoreticky k ustálené odezvě dojde až v čase $t = \infty$, kdy vymizí volné kmitání, ale prakticky lze v daném případě uvažovat ustálenou odezvu již v čase 80 sekund.



Obr. 2.8: Zrychlení v časové oblasti.

Informaci o tom, jak reaguje konstrukce při různé konfiguraci na zatížení odlišných frekvencí, podává amplitudo-frekvenční závislost zobrazena na obrázku (2.9).

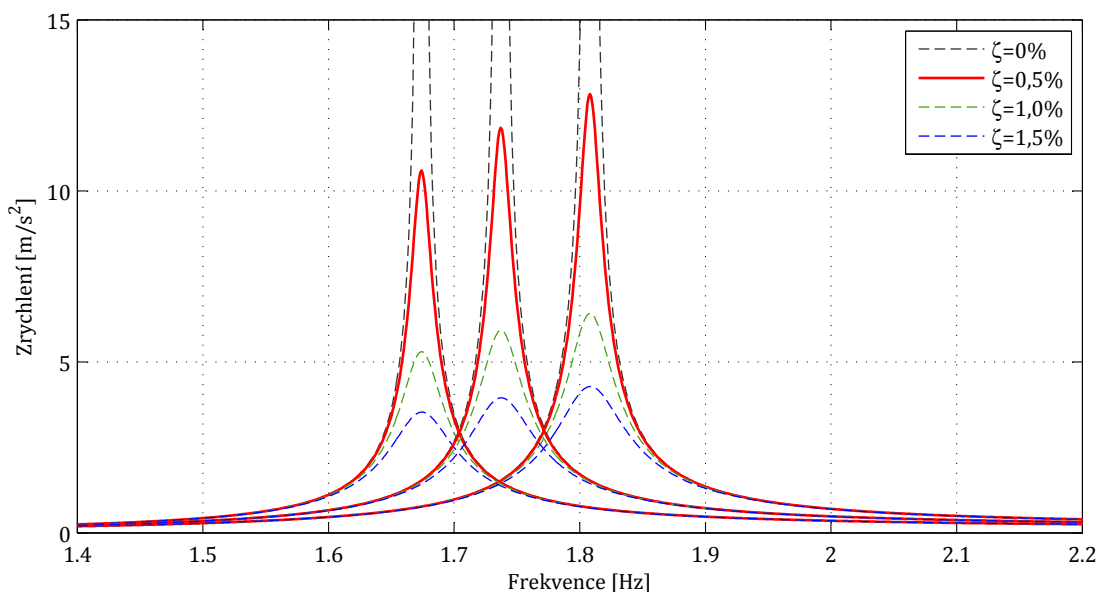
Ta zobrazuje amplitudu zrychlení ustálené odezvy v závislosti na frekvenci zatížení a pro různou volbu velikosti tlumení.

Na obrázku jsou tři špičky odpovídající zleva rezonanci pro případ zahrnutí hmotnosti všech osob na mostě, poloviny osob a nezahrnutí hmotnosti. Krajní vrcholy vymezují frekvenční oblast hypoteticky možných rezonančních stavů, které mohou nastat pro různý podíl celkové hmoty zatěžovacího proudu $0,5 \text{ osob/m}^2$ spolupůsobící s hmotou konstrukce. V případě, že by většina hmoty spolupůsobila, byl by výsledek blízký levému grafu.

Obrázek rovněž ilustruje pozitivní vliv tlumení především při rezonanci, kdy jde o jediný parametr, který omezuje velikost amplitudy.

Prostřední případ, zahrnující polovinu hmotnosti všech osob, se shoduje s příklady uvedenými v technickém průvodci [2], kde se provádí pouze jeden výpočet s průměrnou vlastní frekvencí stanovenou z horní a dolní meze.

Dosažené hodnoty odezvy konstrukce na zatížení skupinou chodců jsou v tabulce (2.2), společně s uvažovanými frekvencemi.



Obr. 2.9: Amplitudo-frekvenční závislost.

Studovaná lávka pro pěší je velmi citlivá na zatížení vyvolané chodci. Již při zatížení jedním chodcem bylo překročeno zrychlení $0,7 \text{ m/s}^2$, viz tabulka (2.1). Skupina synchronizovaných osob potom toto kritérium překročí téměř dvacetinásobně.

hmotnost chodců	f [Hz]	ψ	odezva		
			u [m]	\dot{u} [m/s]	\ddot{u} [m/s ²]
nezahrnuta	1,808	1,00	0,099	1,122	12,75
částečně zahrnuta	1,737	1,00	0,099	1,076	11,75
zcela zahrnuta	1,674	0,96	0,095	0,995	10,45

Tab. 2.2: Vliv skupiny chodců.

2.2.3 Kontrola na numerickém modelu

Na prutovém modelu byla v systému ANSYS provedena harmonická analýza pro případ prázdné mostovky a výsledky byly srovnány s výpočtem na jednostupňovém modelu.

Harmonická analýza na funkčním modelu vyžadovala zadat zatížení včetně frekvenčního rozsahu a parametry tlumení.

Celkové zatížení 3080 N uvažující 11 synchronizovaných osob bylo umístěno uprostřed mezi dvojicí krajních závěsných lan a rozpočítáno na sedm uzlů v šířce mostovky. Na jeden uzel připadlo 440 N.

Frekvenční rozsah byl zvolen 1,6 - 2,2 Hz s krokem 0,006 Hz, což pokrývá rezonanční oblast.

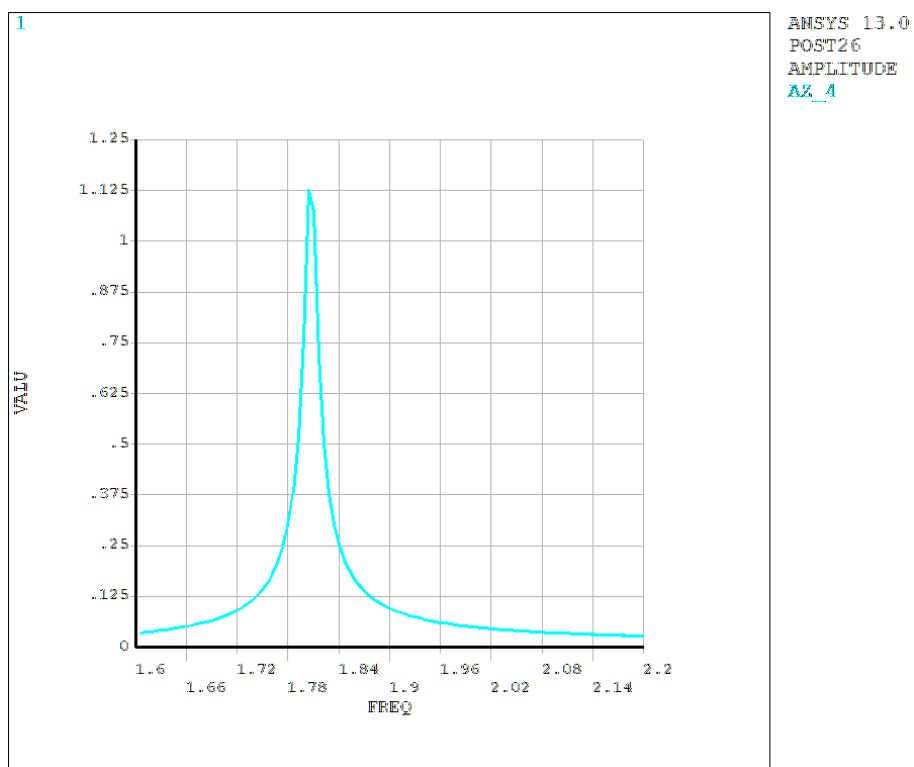
Útlum byl vystižen Rayleighovým tlumením a konstantním poměrným útlumem pro všechny tvary kmitu (DMPRAT=0,002). Parametry α a β Rayleighova tlumení byly určeny ze vztahu

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega} + \beta\omega \right)$$

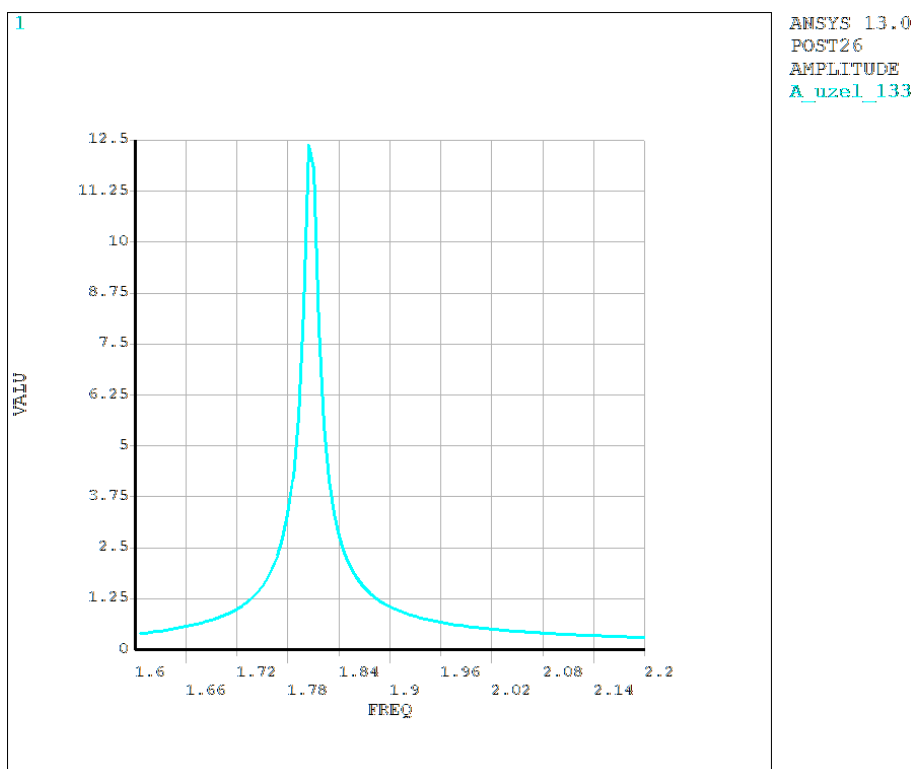
dosazením požadovaného poměrného útlumu $\zeta = 0,3\%$ pro první a druhý ohybový tvar. Byla snaha, aby se výsledný útlum shodoval s útlumem použitým pro jednostupňový model.

Výsledná amplitudo frekvenční závislost ve zrychleních pro případ zatížení skupinou i jediným chodcem je na obrázku (2.10). Maximum 12,5 m/s² je dosaženo pro rezonanční frekvenci $f \approx 1,81$.

Jednostupňový model poskytuje ve srovnání s prostorovým prutovým modelem nepatrně vyšší, ale rozumnou hodnotu zrychlení. Rozdílné výsledky modelů mohou být způsobeny rozdílným tlumením, protože tlumení výrazně snižuje odezvu za rezonance.



(a) Jednoho chodce.



(b) Skupiny chodců

Obr. 2.10: Amplitudo-frekvenční závislost.

2.3 Redukce vibrační odezvy

Hodnoty zrychlení získané jednostupňovým i prostorovým prutovým modelem přesahují kritérium pohody uvedené v evropských normách a konstrukce na účinky vibrací nevyhovuje. Problém konstrukce spočívá v její vlastní frekvenci, která je blízka frekvenci lidského kroku a dochází k rezonančnímu kmitání.

Možným řešením je frekvenční přeladění konstrukce, tedy změna její vlastní frekvence. Vlastní frekvence konstrukce je závislá na tuhosti a hmotnosti konstrukce vztahem

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.2)$$

Zvýšení vlastní frekvence lze zvětšením tuhosti. Tento postup ale není moc účinný.

Prvním důvodem je výskyt tuhosti ve vztahu (2.2) v odmocnině, takže například zdvojnásobení tuhosti způsobí pouze čtyřiceti procentní nárůst vlastní frekvence.

Druhým důvodem je skutečnost, že zvětšení tuhosti hlavní nosné konstrukce se provádí zvětšením účinné výšky průřezu nosníku nebo vytvořením spráženého betonové desky. Navýšení tuhosti je tedy často svázáno s nárůstem hmotnosti konstrukce a efekt na vlastní frekvenci je minimální.

Na řešení konstrukci je vyzkoušen postup spočívající v redukci vibrační odezvy instalací omezovače kmitání s laděnou přídatnou hmotou (TMD-Tuned Mass Damper).

2.3.1 Omezovač kmitání

Omezovač s laděnou přídatnou hmotou je pasivní omezovač kmitání, nevyžaduje tedy energii z vnějšího zdroje jako aktivní tlumiče. Skládá se z hmoty připevněné ke konstrukci pružinou, popřípadě skupinou paralelně zapojených pružin, a doplněné o tlumič.

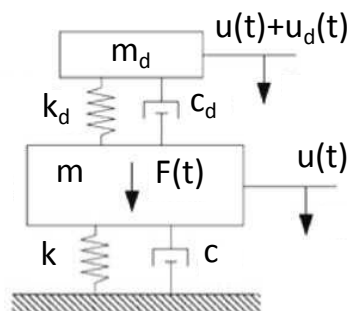
Při vhodném naladění tlumiče, je zatížením působícím na konstrukci iniciována setrvačná síla přídatné hmoty, která působí proti budící síle. Tím je redukována vibrace konstrukce a většina energie dodaná zatížením se spotřebuje kmitáním přídatné hmoty.

Omezovač vibrací se ladí na frekvenci buzeného zatížení, které způsobuje nadměrné vibrace. V případě studované konstrukce je snahou omezit rezonanční kmitání, takže se omezovač ladí na první vlastní ohybovou frekvenci konstrukce.

Funkce jednotlivých parametrů tlumiče:

- **Hmotnost** - určuje primárně velikost setrvačné síly působící při správném naladění proti budící síle.
- **Tuhost** - umožňuje spojení přídatné hmoty s konstrukcí a její naladění na požadovanou frekvenci zatížení

- **Tlumič** - podílí se na redukci vibrací konstrukce a tlumí pohyb přídatné hmoty, čím ovlivňuje disipaci energie



Obr. 2.11: Idealizace konstrukce s TMD

V případě idealizace konstrukce jednostupňovým modelem vystihuje chování konstrukce s upevněným omezovačem vibrací dvoustupňový model na obrázku (2.11). Odezvu konstrukce a omezovače vibrací popisuje soustava dvou diferenciálních rovnic (2.3) odvozená v části (1.1.2).

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c\dot{u} - c_d\dot{u}_d + ku - k_d u_d &= F(t) \\ m_d\ddot{u}_d + m_d\ddot{u} + c_d\dot{u}_d + k_d u_d &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

m, k a c hmotnost, tuhost a parametr tlumení konstrukce při idealizaci jednostupňovým modelem

m_d přídatná hmota omezovače kmitání

k_d tuhost připojení omezovače vibrací ke konstrukci

c_d parametr tlumení tlumiče omezovače kmitání

u, \dot{u}, \ddot{u} absolutní výchylka, rychlost a zrychlení konstrukce

$u_d, \dot{u}_d, \ddot{u}_d$ relativní výchylka, rychlost a zrychlení

$F(t)$ zatížení

Soustava (2.3) byla řešena v absolutních posunech metodou rozkladu do vlastních tvarů kmitu naprogramovanou v systému MATLAB. Proto byla rovnice přepsána do maticového tvaru s maticemi

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c + c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ u_d \end{Bmatrix}$$

Nevýhodou při použití metody rozkladu do vlastních tvarů je, že tlumení již není zadáváno dvojicí hodnot poměrného útlumu odpovídající samostatně tlumení konstrukce a tlumení omezovače kmitání. Na místo těchto hodnot jsou zadávány hodnoty tlumení prvního a druhého vlastního tvaru kmitu dvoustupňové soustavy.

V práci je dále použito označení tlumení konstrukce a omezovače kmitání, ale je namysli tlumení prvního a druhého vlastního tvaru.

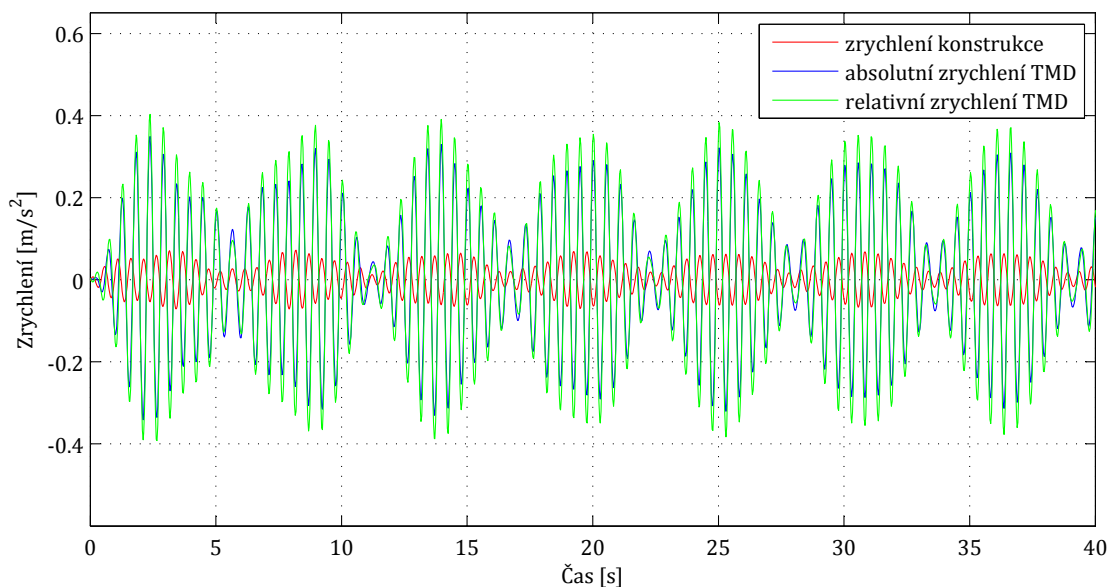
2.3.2 Odezva dvoustupňového modelu

Pro první případ bylo doporučeno vedoucím práce volit velikost přídavné hmoty omezovače kmitání hodnotou 1500 kg a neuvažovat tlumení omezovače kmitání. Tuhost připojení tlumiče byla odvozena ze vztahu pro optimální naladění [7]:

$$f_t = \frac{f_s}{1 + \frac{m_t}{m_s}}.$$

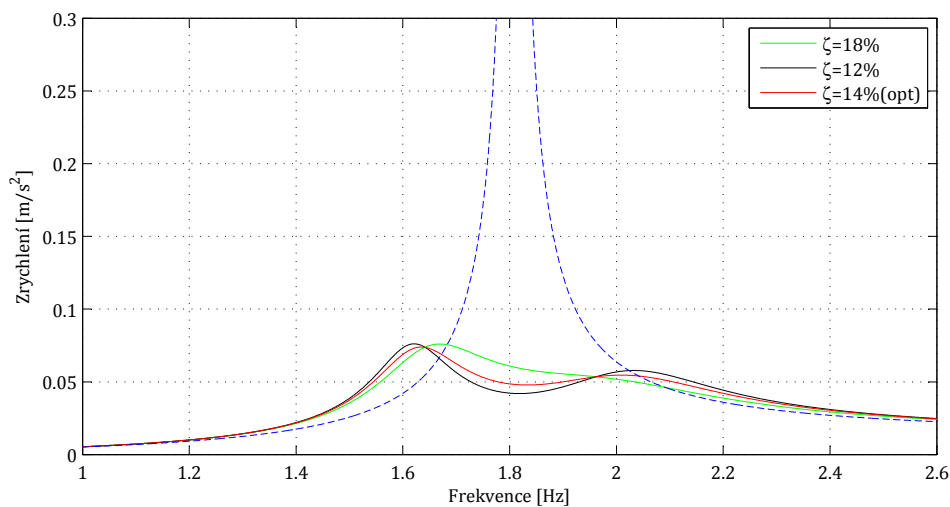
Na obrázku (2.12) je výsledný průběh zrychlení. Zrychlení v čase pulzuje v pravidelných intervalech. Tyto pulzy jsou způsobeny skládáním volného a vynuceného kmitání.

Hodnoty zrychlení konstrukce jsou přibližně desetkrát menší než v případě bez omezovače kmitání.



Obr. 2.12: Zrychlení konstrukce s TMD v časové oblasti.

Lepší představu o odezvě konstrukce s omezovačem kmitání udává amplitudo-frekvenční závislost zrychlení konstrukce, obrázek(2.13). Ta zobrazuje odezvu pro tři varianty poměrného útlumu připevněného tlumiče.



Obr. 2.13: Zrychlení konstrukce s TMD ve frekvenční oblasti.

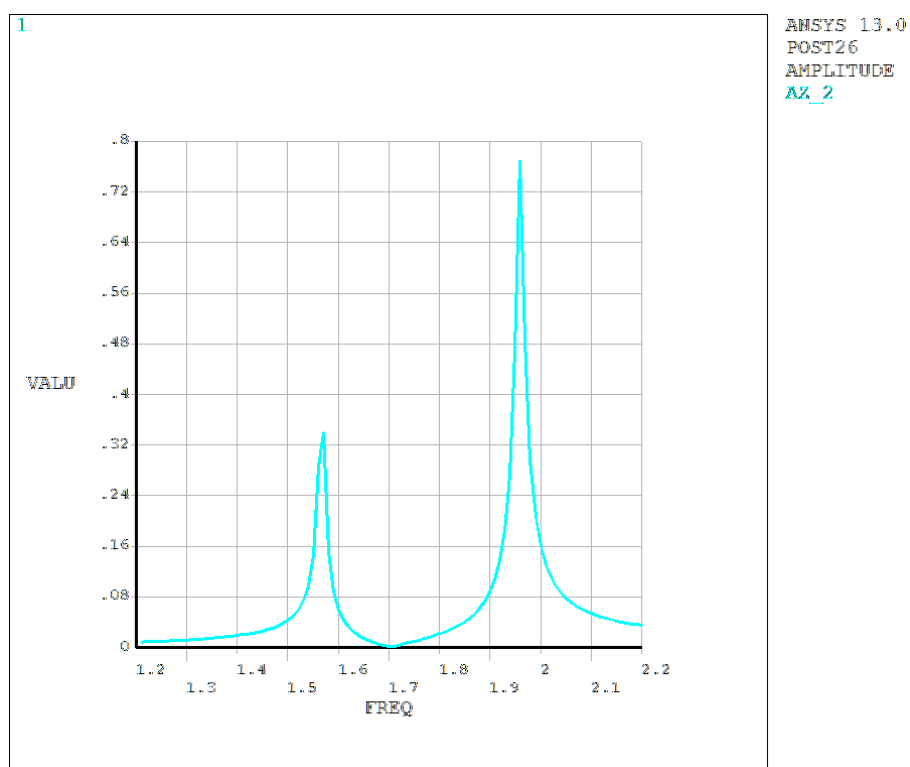
2.3.3 Kontrolní výpočet

Pro srovnání amplitudo-frekvenční závislosti získané pro dvoustupňový model byla provedena harmonická analýza na prutovém modelu s přidanou hmotou, která simuluje vliv tlumiče.

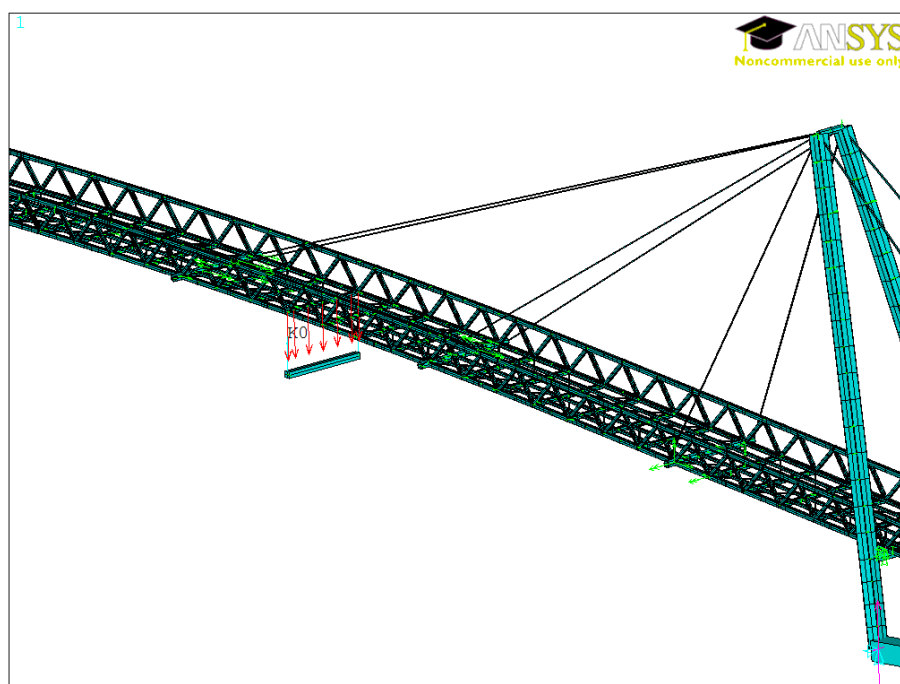
V místě působícího zatížení byla ke konstrukci připevněna přídatná hmota dvojicí prvků *COMBIN14*. Přídatnou hmotu reprezentoval nosník jehož rozměry a hustota byly voleny tak, aby reprezentoval hmotu 1500 kg. Tuhost, stejně jako tlumení, byla zadána pomocí reálné konstanty nehmotného prvku *COMBIN14*.

Pro výpočet byly voleny optimální parametry celkového tlumení $\zeta_{opt} = 14\%$ a tuhosti $k = 171\,500$. Výsledná amplitudo-frekvenční závislost je na obrázku (2.14).

Amplitudo frekvenční závislosti dvoustupňového modelu se bohužel neshoduje s výsledky získaných numerickým výpočtem v ANSYSu. S menšími odchylkami se shodují frekvence při kterých je dosaženo největších zrychlení. Podle špičatosti amplitudo-frekvenční závislosti v případě ANSYSu, se zdá že tlumič neobsahuje tlumení, respektive bylo autorem špatně nastaveno.



Obr. 2.14: Amplitudo-frekvenční závislost s TMD.



Obr. 2.15: Model tlumiče.

2.4 Řešení v systému MATLAB

Prostředí systému MATLAB bylo využito k řešení pohybových rovnic jednostupňového i dvoustupňového modelu. V prostředí systému MATLAB sice jsou zabudovány funkce pro řešení diferenciálních rovnic, ale v práci nebyly využity.

Výpočty byly zautomatizovány tak, aby pro libovolnou změnu základních vstupních dat proběhl celý výpočet včetně uložení výsledku do textového souboru na pevný disk. Výsledky byly později vykresleny do grafů. Vstupními daty byly pro jednostupňový model:

hmotnost	budící síla	počáteční podmínky	poměrný útlum
tuhost	frekvence zatížení	fázové posunutí	koncový čas

a pro dvoustupňový model byly přidány parametry omezovače kmitání.

V případě řešení obyčejné diferenciální rovnice spočívalo zautomatizování výpočtu pouze v sepsání analytického řešení pro obecnou harmonickou sílu, ve tvaru $F \cos(\Omega t + \theta)$. Včetně vyjádření volného kmitání.

Pro případ dvoustupňového modelu byla, pro získání vynuceného a volného kmitání v časové oblasti, zautomatizována metoda rozkladu do vlastních tvarů.

Ta vyžadovala řešení zobecněného problému vlastních čísel. I když problém pro matice 2x2 degeneruje na řešení kvadratické rovnice, bylo vyzkoušeno řešení vlastních čísel numericky. Naprogramovaná mocninná metoda vyřešila přímo i vlastní vektory, které normovala na hmotnost.

Transformaci soustavy rovnic na nezávislé rovnice komplikovala matice tlumení, která transformací není převedena na diagonální tvar. Matice tlumení byla nahrazena zadáním přímo parametru útlumu prvního a druhého vlastního tvaru. Výsledná odezva byla získána vyřešením nezávislých rovnic a převedením jejich řešení zpět do původních souřadnic.

Pro případ řešení amplitudo-frekvenční závislosti, kdy je hledaná pouze ustálená odezva na harmonické buzení, byla soustava diferenciálních rovnic vyřešena analyticky metodou neurčitých koeficientů. Použitý tvar zatížení a hledaného řešení byl

$$\begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} e^{\Omega t + \theta} \quad \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{Bmatrix} e^{\Omega t + \theta}$$

a dále byla řešena algebraická rovnice pro dvě komplexní neznámé \bar{U}_1 a \bar{U}_2 .

Při zautomatizování výpočtů bylo čerpáno převážně z literatury [5], ve které byl popsán i algoritmu mocninné metody pro výpočet vlastních čísel.

3 ZÁVĚR

V práci byl proveden výpočet odezvy konstrukce na pohyb jednoho chodce. Odezva byla vypočtena na jednoduchém jednostupňovém modelu a shodovala se s výpočtem na komplikovaném numerickém modelu. Tato shoda, ale byla podmíněna správnou volbou tuhosti a kmitající hmoty konstrukce. Určení těchto parametrů bez výpočetního softwaru není, pro složité konstrukce téměř možná.

Na druhou stranu, pokud je podrobný numerický model konstrukce k dispozici, je velmi výhodné, ve stádiu ladění konstrukce nebo pro rychlou představu o odezvě konstrukce, sladit numerický model s jednoduchým jednostupňovým modelem. A ten využít například pro rychlý kontrolní výpočet.

LITERATURA

- [1] BACHMANN, Hugo. a Walter. AMMANN. *Vibrations in structures: induced by man and machines*. Zürich: International Association for Bridge and Structural Engineering, c1987. ISBN 3-85748-052-X.
- [2] SETRA. *Footbridges, Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading, Technical guide SETRA*. Paris, France 2006.
- [3] ROOS, Iemke. *HUMAN INDUCED VIBRATIONS ON FOOTBRIDGES: Application & comparison of pedestrian load models*. 2009.
- [4] CRAIG, Roy R. *Structural dynamics: an introduction to computer methods*. New York: Wiley, c1981. ISBN 0471044997.
- [5] BHATT, P. *Programming the dynamic analysis of structures*. New York: Spon Press, 2002. ISBN 0419156100.
- [6] HUMAR, J. L. *Dynamics of structures. 2nd ed.* Exton, PA: A.A. Balkema Publishers, c2002. ISBN 9058092453.
- [7] BACHMANN, Hugo, WALTER J. AMMANN, Florian DEISCHL, et al. *Vibration Problems in Structures Practical Guidelines*. Basel: Birkhäuser Basel, 1995. ISBN 9783034892315.
- [8] HRADIL, P., SALAJKA, V., KALA, J. *Realizace omezovače kmitání na lávce v areálu Škody Auto Mladá Boleslav*. Příspěvek na konferenci. Brno. 2008.
- [9] HRADIL, P., SALAJKA, V., KALA, J. *Realizace omezovače kmitání na lávce v areálu Škody Auto Mladá Boleslav*. Příspěvek na konferenci. Brno. 2008.
- [10] ČSN EN 1990 Eurokód 0: Zásady navrhování konstrukcí.
- [11] ČSN EN 1991-2 ed.2 Eurokód 1: Zatížení konstrukcí - Část 2: Zatížení mostů dopravou.